Departamento de Física Aplicada a los Recursos Naturales

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas

PROBLEMAS DE DINÁMICA COMENTADOS

Física I

Cristina Montalvo Martín

Agustín García-Berrocal Sánchez

Índice general

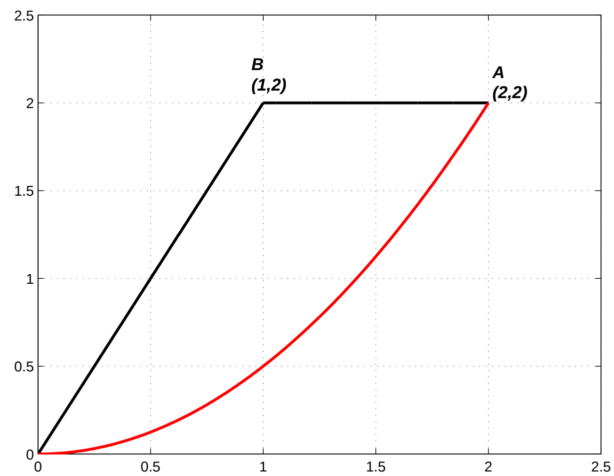
Capítulo 1

DINAMICA DE LA PARTÍCULA

Para poder realizar estos problemas es necesario conocer las leyes de Newton, el teorema de la Energía Cinética y el concepto de Trabajo.

1.1. Problema 1

Hallar el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F} = 6x^2y\vec{i} + (2x^3 - 6y)\,\vec{j}$ al desplazar una masa puntual desde el origen hasta el punto A. 1º) siguiendo la linea quebrada OBA, donde $OB \equiv y = 2x$ y $BA \equiv y = 2$. 2º) a lo largo del arco de parabola $y = \frac{x^2}{2}$. NOTA: Se supone que las coordenadas se miden en metros y la fuerza se expresa en Newtons.



SOLUCIÓN

Este problema es un problema académico que sirve para ilustrar el concepto de trabajo y su cálculo. El trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria es una magnitud escalar que se calcula por medio de una operación vectorial: la integral del producto escalar de la fuerza por el diferencial de trayectoria. Se expresa como:

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1.1}$$

siendo $\vec{F}$ la fuerza que realiza el trabajo, $d\vec{r}$ el diferencial de trayectoria e i y f el inicio y el final de la trayectoria. Así, sustituyendo con los valores del problema, se tiene:

$$\int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^Q (6x^2y\vec{i} + (2x^3 - 6y)\vec{j} \cdot d\vec{r}$$

si pasamos el $d\vec{r}$ a coordenadas cartesianas, se tiene:

$$\int_0^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^A \left(6x^2y\vec{i} + \left(2x^3 - 6y\right)\vec{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

realizando el producto escalar, multiplicando componente a componente, se obtiene:

$$\int_0^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^A 6x^2y dx + \left(2x^3 - 6y\right) dy$$

El producto escalar ya está calculado, ahora es necesario tener en cuenta la trayectoria seguida para poder evaluar la integral. Si primero se evalúa la trayectoria OAB, hay que tener en cuenta que ésta a su vez se divide en dos trayectorias OA y AB. Por tanto, es necesario realizar dos integrales:

$$\int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_O^B 6x^2y dx + \left(2x^3 - 6y\right) dy + \int_B^A 6x^2y dx + \left(2x^3 - 6y\right) dy$$

Como se puede apreciar, es necesario que en la integral exista una única variable para poder evaluar la misma. Por ello, hay que tener en cuenta que para la integral a lo largo de la trayectoria OB, $y = 2x$ y, en consecuencia, $dy = 2dx$. Por tanto,

$$\int_0^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^B 12x^3 dx + \left(2x^3 - 12x\right) 2dx$$

operando(la x varía de 0 en O a 1 en B):

$$\int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (16x^3 - 24x)dx$$

resolviendo

$$\int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = [\frac{16x^4}{4} - 24\frac{x^2}{2}]_0^1 = -8 \text{ J}$$

Para la integral a lo largo de la trayectoria AB, $y = 2$ y por tanto, $dy = 0$, así que:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B 12x^2 dx$$

realizando la integral

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 12x^2 dx = [\frac{12x^3}{3}]_1^2 = 32 - 4 = 28 \text{ J}$$

La integral a lo largo de toda la trayectoria OBA es:

$$\int_0^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = -8 + 28 = 20 \text{ J}$$

Ya tenemos calculado el trabajo a lo largo de la primera trayectoria OBA. A continuación pasaremos a calcular el trabajo a lo largo de la trayectoria definida por la parábola $y = (1/2)x^2$. Una vez realizado el producto escalar entre la fuerza y el diferencial de trayectoria se tiene:

$$\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_O^A 6x^2 y dx + \left(2x^3 - 6y\right) dy$$

Para esta trayectoria $y = \frac{x^2}{2}$ y $dy = xdx$, por tanto:

$$\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_O^A 3x^4 dx + \left(2x^3 - 3x^2\right) xdx$$

poniendo los límites a la integral:

$$\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_O^2 3x^4 dx + \left(2x^4 - 3x^3\right) dx = [\frac{5x^5}{5} - \frac{3x^4}{4}]_0^2 = 2^5 - 12 = 20 \text{ J}$$

Como se puede ver el trabajo es el mismo tanto si lo calculamos a lo largo de una trayectoria como a lo largo de la otra. Esto quiere decir que la fuerza podría ser conservativa, lo que implicaría que el camino recorrido no determina el valor del trabajo, sino únicamente los pubtos principio y final de la trayectoria. Para comprobar que una fuerza es conservativa se puede calcular el rotacional de la misma:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x^2 y & 2x^3 - 6y & 0 \end{pmatrix} = 6x^2 - 6x^2 = 0 \tag{1.2}$$

Como se aprecia, al ser el rotacional nulo, la fuerza es conservativa y por tanto, con haber calculado el trabajo a lo largo de una única trayectoria hubiera sido suficiente.

1.2. Problema 2

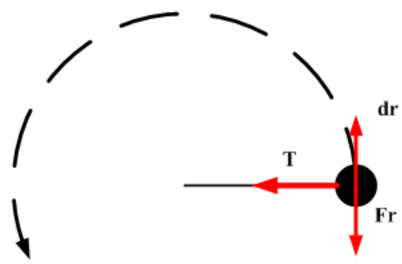
Una partícula de masa m se desliza sobre un plano horizontal rugoso describiendo una trayectoria circular de radio r. La partícula está sujeta a un punto del plano por un hilo ideal. El coeficiente de rozamiento es constante. La velocidad que posee la partícula en el instante $t = 0$ es v_o , y al completar la primera vuelta a la circunferencia, la velocidad de la partícula es $v_o/2$. Se pide : 1º.- Trabajo de rozamiento realizado en la primera vuelta. 2º.- El coeficiente de rozamiento. 3º.- Número de vueltas que dará la partícula hasta pararse.

SOLUCIÓN

En este problema hay que tener en cuenta que el trabajo se puede calcular por medio de su propia definición como la integral del producto escalar de la fuerza y el diferencial de trayectoria o por medio del teorema de la energía cinética que establece que:

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{1.3}$$

siendo v_i y v_f las velocidades inicial y final del cuerpo de masa m sobre el que se efectúa trabajo. Por tanto, dado que el enunciado nos da las velocidades al inicio y al finalizar la primera vuelta, el incremento de energía cinética es conocido. No obstante, para saber el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será necesario saber qué fuerzas han realizado trabajo durante la trayectoria circular. En la figura se muestra un esquema de las fuerzas implicadas.



Hay que tener en cuenta que el peso de la bola y la normal del suelo sobre la bola se anulan entre si. Como se puede observar, además de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$, existe la tensión del hilo $\vec{T}$, pero dado que ésta es perpendicular al diferencial de trayectoria $d\vec{r}$, no efectúa ningún trabajo, puesto que éste es un producto escalar. Por tanto, la única fuerza que contribuye realizando un trabajo es el rozamiento. Pero no podemos calcular trabajo integrando su expresión, porque desconocemos el módulo de $\vec{F}_r$ que es μN, siendo μ desconocida todavía. Por eso hay que recurrir al teorema de la energía cinética, en el que conocemos el incremento de esta energía. Así:

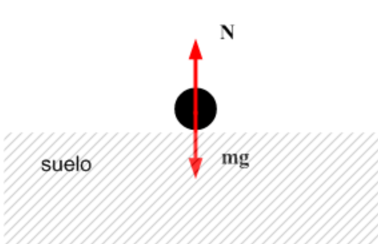
$$\int_i^f \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \Delta E_k = \frac{1}{2}m((v_0/2)^2 - v_0^2) = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

el resultado del trabajo es negativo ya que el rozamiento y el diferencial de trayectoria son vectores de sentidos contrarios a lo largo de toda la trayectoria circular. El trabajo del rozamiento siempre es negativo ya que disipa energía y contribuye a que se produzca un decremento de la velocidad.

Para calcular el coeficiente de rozamiento es necesario considerar la expresión de la fuerza de rozamiento al deslizamiento:

$$F_r = \mu N \tag{1.4}$$

En este problema concreto, la normal del suelo sobre la bola se puede hallar teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas de la figura:



donde se puede ver que es el peso de la bola el que anula la normal del suelo sobre ésta, y, en consecuencia:

$$F_r = \mu N = \mu mg$$

teniendo en cuenta esta última expresión, se puede calcular el coeficiente de rozamiento por medio del teorema de la energía cinética:

$$\int_i^f \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \Delta E_k = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

realizando el producto escalar del lado izquierdo de la ecuación y sustituyendo el valor de F_r:

$$\int_i^f \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -\int_i^f \mu mgdr = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

Obsérvese que siempre hay que obtener en el producto escalar, la proyección de la fuerza sobre la tangente a la trayectoria, que es la dirección de $d\vec{r}$. Para el rozamiento la proyección es todo su módulo F_r pero con sentido contrario al $d\vec{r}$, es decir con signo negativo. Realizando la integral con sus límites correspondientes:

$$-\int_0^{2\pi R} \mu mgdr = -\mu mg2\pi R = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

despejando μ:

$$\mu = -\frac{3}{16g\pi R}mv_0^2$$

Por último, el apartado 3 nos pide que calculemos el número de vueltas que se realizan antes de que la bola se pare. Para ello necesitamos calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento desde que la bola inicia su trayectoria con una velocidad v_0, hasta que se para, una vez recorridas n vueltas. Esto podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$-\int_0^{n2\pi R} \mu mgdr = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

realizando al integral y despejando n se obtiene:

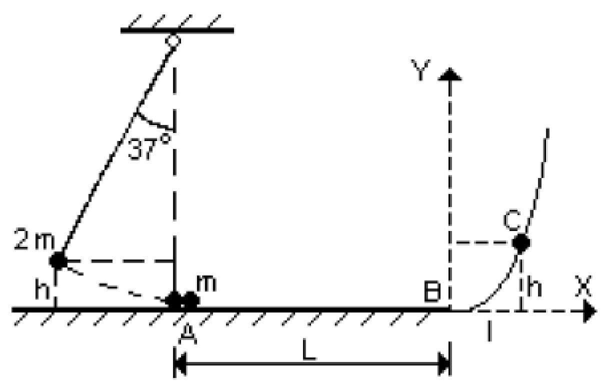
$$n2\pi R\mu mg = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow n = \frac{1}{4\pi R\mu g}v_0^2$$

teniendo en cuenta el valor de μ calculado:

$$n = \frac{4}{3}\text{vueltas}$$

1.3. Problema 3

Sobre la masa m situada en el punto A, incialmente en reposo, choca el péndulo de masa $2m$ que partió del reposo desde una altura h . Tras el choque, ambas masas se mueven hacia la derecha de forma que la más pesada posee una energía cinética doble que la más ligera. La superficie ABC, sobre la que desliza la masa m, es lisa, siendo el tramo BC el de una parábola cuyo vértice es B y de ecuación $y = \frac{hx^2}{2l}$.



Cuando la partícula asciende por el tramo BC, actúa una fuerza horizontal cuya expresión respecto de los ejes cartesianos de la figura es $\vec{F} = ay\vec{i}(a > 0)$. Siendo datos h , L, a, m y g (aceleración de la gravedad), se pide : 1º.- Velocidad de la masa m al llegar al punto B. 2º.- Determinar el valor de la constante l para que la velocidad en C coincida con la velocidad en B.

SOLUCIÓN

Para contestar la primera pregunta es necesario que dividamos la trayectoria de la bola en tres fases:

1. Descenso del péndulo una altura h.

2. Choque entra ambas bolas

3. Trayectoria recorrida tras el choque hasta llegar a B.

Así, en la primera fase se puede observar como únicamente realiza trabajo el peso, ya que la tensión del hilo es perpendicular en todo momento al diferencial de trayectoria. Por tanto, utilizando el teorema de la energía cinética en el péndulo se tiene:

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_k \longrightarrow 2mgh = \frac{1}{2} 2mv_{2m}^2$$

despejando la velocidad v_{2m} del péndulo en A:

$$v_{2m} = \sqrt{2gh}$$

Esta es la velocidad que tiene el péndulo de masa $2m$ antes de producirse el choque. A continuación vamos a plantear las ecuaciones del choque. Por un lado sabemos que la cantidad de movimiento del sistema debe conservarse antes y después del choque. Por otro, según el enunciado,tras producirse el choque la energía cinética de la más pesada es doble que la de la más ligera. La primera de estas dos premisas se puede expresar como:

$$2m \cdot v_{2m} = 2m \cdot v'_{2m} + m \cdot v'_m$$

donde v_{2m} es la velocidad del péndulo antes del choque,v'_{2m} es la velocidad del péndulo después del choque y v'_m la velocidad de la masa m después del choque. La cantidad de movimiento $m\vec{v}$ del péndulo tiene, antes del choque la dirección de $\vec{v}_{2m}$, es decir, horizontal y de sentido hacia la derecha. En este instante anterior al choque la masa m está en reposo y, por tanto, su cantidad de movimiento es nula. Después del choque ambas partículas tendrán velocidades $\vec{v'}_{2m}$ y $\vec{v'}_m$ de dirección horizontal y sentido hacia la derecha. La ecuación que acabamos de escribir es la proyección horizontal de la igualdad vectorial de las cantidades de movimiento del sistema formado por ambas masas inmediatamente antes einmediatamente después del choque. La segunda condición expresará que la energía cinética de la masa mayor ($2m$) es doble de la energía cinética de la masa menor(m), después del choque:

$$\frac{1}{2}2mv_{2m}'^2 = 2\frac{1}{2}mv_m'^2$$

Las incógnitas son v_m' y v_{2m}' y dado que tenemos dos ecuaciones, es posible resolver el sistema quedando:

$$v_m' = v_{2m}' \quad v_m' = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

Tras el choque la bola de masa m recorre la trayectoria AB que de acuerdo al enunciado es un tramo liso, por tanto la velocidad en A será la misma que en B porque no hay ninguna fuerza que trabaja y su energía cinética no se incrementa (la velocidad permanece con valor constante).

$$v_B = v_m' = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

siendo ésta la respuesta pedida en el primer apartado del enunciado. Para responder a la segunda pregunta es necesario recordar que la trayectoria BC es una superficie parabólica lisa. Dado que la bola asciende por esta superficie una altura h, la dos fuerzas que realizan trabajo son el peso y la fuerza $\vec{F}$, por consiguiente:

$$W_{peso} = -mgh$$

$$W_F = \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_B^C aydx = \int_0^l a\frac{h}{l^2}x^2dx = [a\frac{h}{l^2}\frac{x^3}{3}]_0^l = ahl/3$$

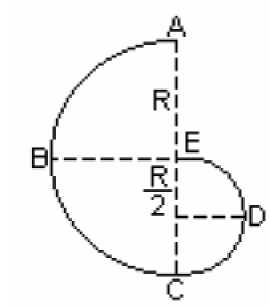
Recuérdese que $\vec{F}$ tiene dirección horizontal y por tanto solo primera componente. Puesto que la bola asciende una altura h siendo la velocidad en C igual a la velocidad en B, la suma de los trabajos calculado debe ser igual a cero puesto que el incremento de energía cinética debe ser nula:

$$W_{peso} + W_F = 0 = -mgh + ahl/3 \rightarrow l = \frac{3mg}{a}$$

contestándose así a la segunda pregunta del enunciado.

1.4. Problema 4

La sección recta vertical de una superficie cilíndrica fija está constituida por una parte semicircular ABC de radio R y otra parte, también semicircular CDE, de radio $R/2$, como se indica en la figura. Desde el punto más alto A de esta sección y por el interior de la superficie cilíndrica se lanza una masa puntual m con velocidad $\vec{v_0}$ situada en el plano de la sección recta y que describe la trayectoria $ABCDE$. En el trayecto ABC, el rozamiento es despreciable y en el trayecto CDE el módulo de la fuerza de rozamiento es constante e igual a k. Se pide hallar el valor máximo de k para que la masa m llegue a alcanzar el punto E sin despegarse antes de la superficie cilíndrica.



SOLUCIÓN

Para lanzar la masa puntual desde A hasta E sin que se ésta se despegue al llegar a E es necesario que la masa no se pare a lo largo de toda la trayectoria. En el momento en que se parara la masa, sobre todo si se produce entre el punto D y E, se despegaría de la superficie y caería por su propio peso. Como se puede intuir, cuanto mayor sea la velocidad inicial, mayor será la velocidad que alcance la masa en E, cumpliéndose el requisito pedido. No obstante, la velocidad inicial es un parámetro dado en el enunciado, así que va a ser el rozamiento y concretamente el parámetro k lo que determinará la solución del problema. Cuanto mayor sea el rozamiento, mayor disminución de la velocidad habrá. Hay que encontrar el valor máximo de k para que se cumpla la condición de que la velocidad no disminuya tanto que consiga que la masa se despegue antes de llegar a E. Para ello es necesario calcular de qué depende k. Inicialmente se va a calcular el trabajo realizado por las fuerzas a lo largo del camino AC y posteriormente el trabajo a lo largo de la trayectoria CE.

Así, se tiene que en la trayectoria AC sólo realiza trabajo el peso, ya que la masa desciende $2R$ así que el trabajo de éste se puede igualar a la diferencia de energías cinéticas, siendo v_C la velocidad de la masa al llegar al punto C.

$$W_{AC} = mg2R = \frac{1}{2}m(v_C^2 - v_0^2)$$

Si despejamos la energía cinética en C obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1.5}$$

Por otro lado, el trabajo realizado a lo largo de CE es la suma del trabajo del peso, que asciende una altura R, y de la fuerza de rozamiento:

$$W_{CE} = -mgR - k\pi\frac{R}{2} = \frac{1}{2}m(v_E^2 - v_C^2)$$

siendo v_E la velocidad de la masa en el punto E. En esta ecuación el trabajo del rozamiento se ha calculado mediante $W_{F_r} = \int_C^E \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C^E kdr = -k\pi\frac{R^2}{2}$, donde se ha tenido en cuenta que $\vec{F_r}$ lleva la dirección de $d\vec{r}$ pero sentido contrario, que su módulo es constante k y que recorre media circunferencia de radio $R/2$.Si en esta última ecuación sustituimos el valor de la energía cinética en C obtenido en 1.7, se tiene:

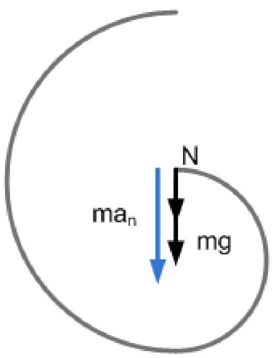
$$-mgR - k\pi\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mv_E^2 - (mg2R + \frac{1}{2}mv_0^2) \tag{1.6}$$

operando y dejando a un lado de la ecuación el sumando que contiene el parámetro k:

$$mgR + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_E^2 = k\pi\frac{R}{2} \tag{1.7}$$

como se puede observar, el parámetro k depende de 3 elementos principalmente:

- peso de la masa puntual
- la velocidad inicial con que se lanza la masa
- la velocidad de la masa en el punto E



El primer y segundo elementos son datos que vienen dados por el enunciado y no podemos cambiar. La velocidad en E es desconocida a priori pero podemos ver de qué depende su valor realizando un análisis de fuerzas en el punto E.

Como se puede ver en la figura, en el punto E hay dos fuerzas que actúan sobre la masa. Por un lado su propio peso, vertical y hacia abajo y por otro lado, la normal que ejerce la pista sobre la bola, que tiene la misma dirección y sentido que el peso en esta posición E. La suma de ambas fuerzas, por la segunda ley de Newton, debe ser igual a la masa por la aceleración:

$$mg + N = ma_n = \frac{mv_E^2}{R/2} \tag{1.8}$$

donde a_n es la aceleración normal si la trayectoria es circular hasta llegar a E. No obstante, como se aprecia en la ecuación y en la figura, la aceleracíón considerada es una aceleración normal y por tanto su valor será igual a la velocidad de la masa al cuadrado en el punto considerado dividido por el radio de la trayectoria, que en este caso concreto vale $R/2$. En la ecuación 1.7 se ve que para que k sea máxima, v_E debe ser mínima. Lo que es perfectamente lógico, a mayor valor del rozamiento, menor será la velocidad en E. Pero ha de ser compatible con la condición 1.8. En esta última ecuación se puede ver que el valor de v_E se hace mínimo cuando el valor de N se hace lo más pequeño posible, es decir, $N = 0$ (ya que el peso no puede variar). Sigue el contacto geométrico de la bola con la pista, aunque ya no haya contacto mecánico (la reacción N se anula) . Teniendo en cuenta este hecho, se puede despejar el valor de v_E^2 en la última ecuación:

$$mv_E^2 = \frac{mgR}{2}$$

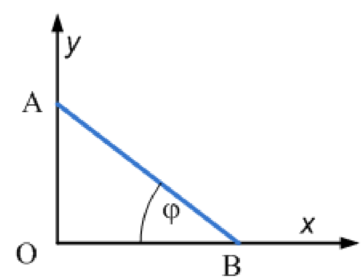
el valor hallado, se puede introducir en la ecuación 1.8, con el objetivo de llegar al valor de k, y al operar adecuadamente se obtiene:

$$k = \frac{m}{\pi R}\left(\frac{3}{2}gR + v_0^2\right)$$

1.5. Problema 5

En el punto más alto de un plano inclinado rugoso y fijo, se deja caer sin velocidad inicial una masa puntual m sometida a su peso y a una fuerza constante $\vec{F} = k\vec{i}$.

Si el coeficiente de rozamiento μ es conocido y constante , se pide : 1º) valor de la constante k para que al llegar m al punto más bajo B del plano, no haya variado su energía mecánica. 2º) a partir del valor de k obtenido en el apartado anterior, calcular la aceleración de m sobre el plano y sacar consecuencias del resultado obtenido.



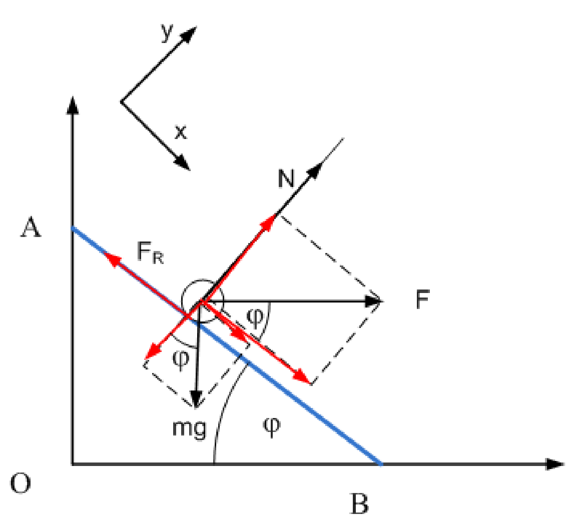
SOLUCIÓN

Para poder realizar el problema hay que realizar un diagrama de fuerzas y proyectarlas sobre unos ejes que sean paparelos y perpendiculares a la superficie del plano. En la figura se muestra este diagrama, que incluye las fuerzas mg, $\vec{F}$, la reacción $\vec{N}$ del plano y el rozamiento $\vec{F_r}$.

De este diagrama, y proyectando las fuerzas sobre los ejes marcados se llega a las dos ecuaciones siguientes:

$$mg\sin(\varphi) + k\cos(\varphi) - F_R = ma \qquad (1.9)$$

$$N - mg\cos(\varphi) + k\sin(\varphi) = 0 \qquad (1.10)$$



Teniendo en cuenta que $F_R = \mu N$ y que se puede despejar N de la segunda ecuación anterior, obtenemos:

$$N = mg\cos(\varphi) - k\sin(\varphi) = 0 \tag{1.11}$$

$$mg\sin(\varphi) + k\cos(\varphi) - \mu N = mg\sin(\varphi) + k\cos(\varphi) - \mu mg\cos(\varphi) + \mu k\sin(\varphi) = ma \tag{1.12}$$

Por otro lado, hay que tener en cuenta el dato del enunciado acerca de que la energía mecánica se conserva a los largo de la trayectoria desde A hasta B y que la velocidad inicial es nula. Como la energía mecánica es la suma de la potencial del peso y la cinética, se tiene:

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$$

y entonces:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Además, a lo largo de la trayectoria AB han realizado trabajo el peso, la fuerza de rozamiento y la fuerza F. El teorema de la energía cinética nos da:

$$mgh_A - \mu NL + kL\cos(\varphi) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

siendo L la longitud del plano. Por la condición de conservación de la energía mecánica, $mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$, la ecuación queda reducida a:

$$-\mu NL + kL\cos(\varphi) = 0$$

Por tanto, sustituyendo el valor de N obtenido en 1.12 y despejando k:

$$-\mu(mg\cos(\varphi) - k\sin(\varphi)) + k\cos(\varphi) = 0 \rightarrow k = \frac{\mu mg\cos(\varphi)}{\mu\sin(\varphi) + \cos(\varphi)}$$

Una vez obtenido k, al sustituirlo en 1.12 se obtiene que la aceleración es:

$$a = g\sin(\varphi)$$

este resultado implica que la fuerza F tiene una valor tal que su componente tangencial a la superficie del plano es exactamente igual a la fuerza de rozamiento, lo que da lugar a que la aceleración de la bola es idéntica a la componente tangencial de la aceleración de la gravedad. Si hubiéramos resuelto el problema considerando en el eje x como única fuerza en ese eje la componente del peso, ya que la condición de conservación de la energía mecánica implica que el trabajo de las otras fuerzas, excluido el peso, debe ser nulo y por tanto la componente de $\vec{F}$ sobre el plano debe ser igual y contraria a F_r, hubiéramos obtenido la misma aceleración $a = g \sin \varphi$. El valor de k se sacaría a través de $k \sin \varphi = \mu N$.

Capítulo 2

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS

La dinámica de los sistemas se encarga de relacionar las fuerzas existentes con los movimientos de los sistemas. Concretamente en las próximas páginas se tratarán problemas de dinámica de sólidos rígidos en movimiento plano. Este movimiento puede ser de traslación o de rotación en torno a un centro instantáneo o un centro permanente. Para resolver estos problemas hay que tener en cuenta dos teoremas básicos:

- Teorema del centro de masas
- Teorema del momento cinético

Cuando tenemos un sistema de partículas materiales podemos considerar que toda la masa del cuerpo está concentrada en un punto denominado centro de masas. El centro de masas G se puede calcular para un conjunto de masas $m_i$como:

$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i}{\Sigma m_i}$$

siendo $\vec{r}_C$ el vector posición del centro de masas y $\vec{r}_i$, el vector de posición de cada una de las masas.

El teorema del centro de masas establece que la suma de todas las fuerzas exteriores al sistema es igual al producto de la masa del sistema por la aceleración de su centro de masas.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

Un sólido plano con simetría tiene su centro de masas en el punto de corte de dos ejes de simetría del cuerpo. Por otro lado, el teorema del momento cinético establece que la suma de momentos respecto al centro de masas de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en rotación debe ser igual al producto del momento de inercia por su aceleración angular.

$$\Sigma\vec{N} = I_C\vec{\alpha}$$

siendo $\vec{N}$ los momentos de las fuerzas, I_G el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje perpendicular al plano del sistema que pasa por el centro de masas y α la aceleración angular del cuerpo.

Cuando no se toman momentos respecto al centro de masas, es posible tomarlo respecto al centro instantáneo de rotación (CIR) , punto que tiene velocidad nula. En ese caso, es necesario corregir el momento de inercia por medio del Teorema de Steiner.

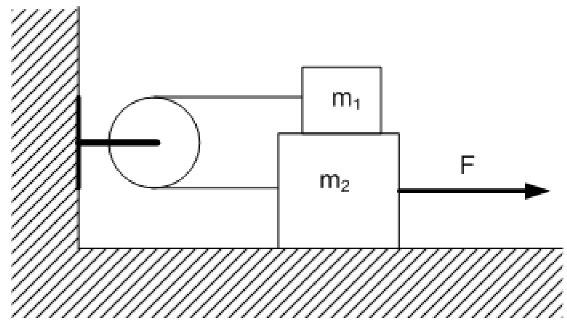
$$\Sigma\vec{N}_{CIR} = I_{CIR}\vec{\alpha}$$

$$I_{CIR} = I_G + MD^2$$

siendo I_{CIR} el momento de inercia respecto al eje que siendo perpendicular al plano del sistema, pasa por CIR, $\vec{N}_{CIR}$, momento de una fuerza respecto al CIR, M la masa del sólido y D la distancia que existe entre el centro de masas y el CIR respecto al cuál se toman momentos.

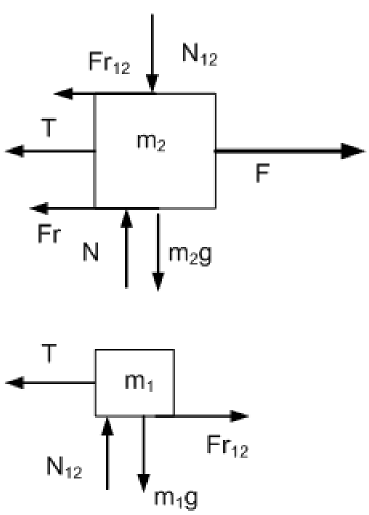
2.1. Problema 1

La fuerza $\vec{F}$ acelera al bloque m_2 hacia la derecha. Hallar esta aceleración sabiendo que los coeficientes de rozamiento entre m_1 y m_2 y el suelo son iguales a μ, y el rozamiento en la polea es despreciable.



SOLUCIÓN

En todo problema de dinámica, y sobre todo en dinámica de sistemas, es fundamental realizar un diagrama de cuerpo libre incluyendo las fuerzas que actúan. Para realizar este diagrama es necesario tener en cuenta que hay que separar los cuerpos y realizar un diagrama por cada uno de ellos. Esto es debido a que por la ley de acción y reacción, determinadas fuerzas como las reacciones que ejercen entre sí determinados cuerpos pueden no verse si se realiza un único diagrama global.



En el ejemplo que tenemos el diagrama para uno y otro cuerpo se muestran en las figuras. La tensión es de módulo T igual para ambos cuerpos, ya que el hilo no roza con la polea. El bloque m_2 de abajo, se desplaza hacia la derecha deslizando sobre el suelo y sobre la cara inferior del bloque m de arriba.

Por ello los rozamientos tienen sentido hacia la izquierda.

El bloque pequeño desliza hacia la izquierda sobre el bloque grande ; el rozamiento que actúa sobre él tiene sentido hacia la derecha. La normal de apoyo de un bloque sobre el otro se ha denominado N_{12} y en el apoyo contra el suelo , N

A continuación escribiremos las ecuaciones del teorema del centro de masas correspondientes a ambos diagramas. Del primer cuerpo tenemos tomando como sentido positivo el de avance de su centro de masas:

$$m_1 g - N_{12} = 0 \longrightarrow m_1 g = N_{12}$$

$$T - Fr_{12} = m_1 a$$

Del segundo cuerpo se tiene, siguiendo análogo criterio de signos:

$$-N = 0 \longrightarrow N = m_2 g + N_{12}$$

$$F - T - Fr_{12} - Fr- = m_2 a$$

Las fuerzas de rozamiento que aparecen en las ecuaciones son ambas de deslizamiento, por tanto:

$$Fr = \mu N \quad ,, Fr_{12} = \mu N_{12}$$

Además, dado que ambos cuerpos se están trasladando y están unidos por un hilo, las aceleraciones serán iguales, ya que al ser el hilo inextensible, lo que se muevan hacia la izquierda los puntos del tramo superior del hilo, tiene que ser igual a lo que se muevan los puntos del hilo inferior hacia la derecha. Los módulos de las aceleraciones han de ser iguales: $a_1 = a_2 = a$. Por eso no se han indicado subíndices de a en las ecuaciones. Sustituyendo las fuerzas de rozamiento en las ecuaciones anteriores, nos queda:

$$T - \mu m_1 g = m_1 a$$

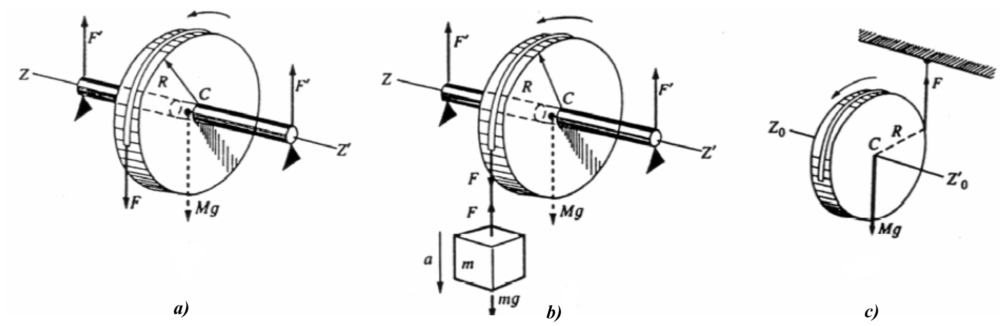
$$F - T - \mu m_1 g - \mu(m_2 g + m_1 g) = m_2 a$$

sumando ambas, se elimina la tensión y obtenemos:

$$F - 3\mu m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a \longrightarrow a = \frac{F - \mu g(3m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

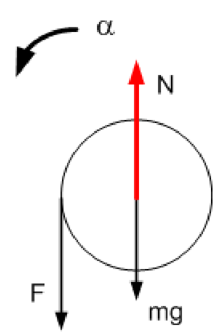
2.2. Problema 2

Un disco de $0,5$ m de radio y 20 kg de masa puede girar libremente alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Al tirar de una cuerda que está arrollada alrededor del borde del disco se le aplica a éste una fuerza de $9,8$ N. Hallar la aceleración angular del disco de la figura a) y la aceleración angular del sistema de la figura b). El cuerpo tiene una masa de 1kg y los datos del disco son los mismos del caso anterior. El eje ZZ' está fijo. Por último, hallar la aceleración angular del disco de la figura (c) . Supóngase que se tienen los mismos datos para el disco que en el caso anterior.



SOLUCIÓN

Este problema trata tres ejemplos para mostrar la dinámica de rlotación de un disco en tres situaciones diferentes. Como siempre, comenzaremos dibujando el diagrama de fuerzas, primeramente del disco a). Al ser un sólido en rotación, además de las ecuaciones del teorema del centro de masas, también plantearemos las del momento cinético. Primeramente proyectando las fuerzas sobre el eje vertical, tenemos:



$$N - F - Mg = 0$$

donde N es la suma de las reacciones F' de reacción en el

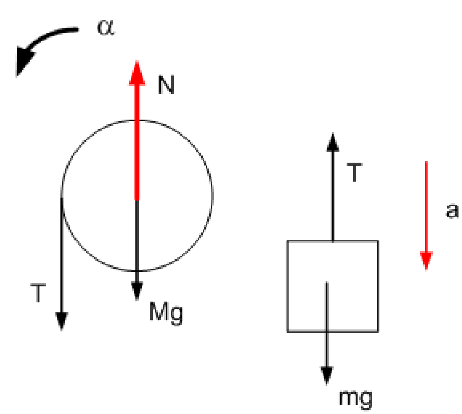
cojinete del eje, que no puede desplazarse.El sumatorio de fuerzas es nulo ya que no existe movimiento a lo largo del eje vertical puesto que el disco está apoyado. Si tomamos momentos respecto al centro de masas del disco que es el centro del disco, únicamente tiene momento la fuerza $\vec{F}$. Tanto la reacción del eje como el peso, pasan por el propio centro de masas, no pudiendo efectuar momento.

$$F \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

despejando α:

$$\alpha = \frac{2F}{MR}$$

Para el segundo caso necesitaremos realizar dos diagramas de cuerpo libre; uno para el disco que sólo gira y otro para el bloque que sólo se traslada hacia abajo. Las ecuaciones para el primero son:



$$Mg + T - N = 0$$
$$T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

donde T es la tensión del hilo. Para el bloque:

$$mg - T = ma$$

como se puede observar, hemos tomado como el sentido positivo el del movimiento, en el giro del disco el contrario a las agujas del reloj y para el bloque hacia abajo. Puesto que ambos cuerpos están unidos por el hilo, habrá que plantear una ecuación de ligadura. Se puede observar que cualquier punto P de la periferia del disco tiene una aceleración lineal igual a:

$$a_P = \alpha R$$

como el bloque está unido al disco por la periferia de éste, entonces se puede afirmar que los puntos de la periferia del disco tendrán la misma aceleración que el propio bloque(el hilo se traslada verticalmente). Así:

$$a_P = a = \alpha R$$

con esta última ecuación podemos despejar la tensión en función de la aceleración angular de la ecuación para el centro de masas del bloque:

$$T = mg - ma = m(g - \alpha R)$$

y sustituyendo este valor en la ecuación del momento cinético del disco:

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha = m(g - \alpha R) \rightarrow \alpha = \frac{mg}{R(\frac{1}{2}M + m)}$$

Para el tercer caso, como en los anteriores, haremos el diagrama de fuerzas correspondiente.

La ecuación del teorema del centro de masas es:

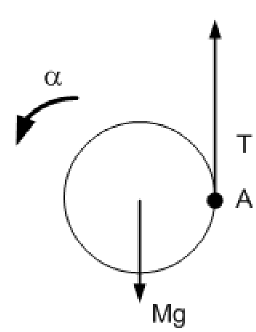
$$Mg - T = Ma$$

en este caso el centro de masas del disco, al no estar apoyado, desciende con una aceleración definida por a. Para el momento cinético tenemos:

$$T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

teniendo en cuenta que se han tomado momentos respecto al centro de masas del cilindro. Como se puede ver aún queda una ecuación por plantear ya que a, T y α son incógnitas del problema y sólo hay 2 ecuaciones.

El punto A de la figura está quieto porque todo el tramo vertical del hilo permanece en reposos; es un centro instántaneo de rotación y su velocidad es nula. Se puede ver que según va descendiendo el disco se va desenrollando una longitud de



hilo igual a la recorrida por el disco, es decir, estamos ante una rodadura sin deslizamiento y, en consecuencia, el punto de contacto entre el hilo y el disco es el CIR. Este es un caso dinámicamente idéntico a un disco que rueda sin deslizamiento por un plano. Por tanto, la aceleración del centro de masas, al girar en torno a A, debe ser igual a:

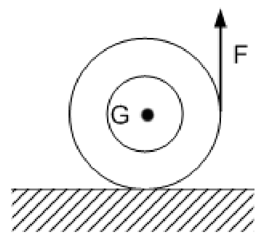
$$a = \alpha R$$

Con las tres ecuaciones anteriores llegamos al siguiente valor de α:

$$\alpha = \frac{2g}{3R}$$

2.3. Problema 3

Un cilindro de revolución, homogéneo, de radio $R = 40$ cm y masa $M = 6$ kg tiene una ranura de radio 20 cm en la que se arrolla un hilo ideal. Se aplica al extremo libre del hilo una fuerza vertical $F = 30$ N. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento con el plano de apoyo es $\mu = 0,2$, se pide : 1º) diagrama de fuerzas que actúan sobre el cilindro. 2º) comprobar si el cilindro desliza o no. 3º) aceleración angular y aceleración del centro de masas del cilindro.(tómese $g = 10$ ms^{-2}).



SOLUCIÓN

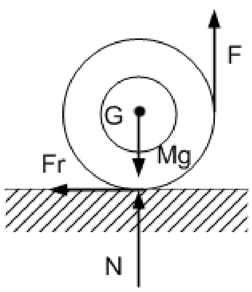
Para determinar si el cilindro rueda con o sin deslizamiento plantearemos una hipótesis; si ésta no fuera cierta, llegaríamos a un resultado ilógico. Así que nosotros plantearemos que el disco rueda sin deslizamiento y aplicaremos todas las ecuaciones que justifiquen esa condición. Para poder comprobar si la hipótesis es cierta calcularemos la fuerza de rozamiento y si ésta sale mayor que el producto μN, entonces diremos que la hipótesis de partida es incorrecta, ya que la fuerza de rozamiento nunca puede ser mayor que el producto antes señalado.

HIPÓTESIS Rodadura sin deslizamiento

$$Fr \leq \mu N \rightarrow \text{hipótesis cierta}$$

$$Fr > \mu N \rightarrow \text{hipótesis falsa}$$

Si la superficie fuese lisa y no existiese Fr, al aplicar verticalmente F, tomando momento en torno a G, el giro producido sería en el sentido contrario a las agujas del reloj. Esto haría que el punto de contacto del cilindro con el suelo tiende a moverse hacia la derecha. Esto haría que el punto de contacto del cilindro con el suelo tiende a moverse hacia la derecha, patinando sobre el suelo . Al existir Fr debe ser de sentido contrario, hacia la izquierda. Que consiga o no dejar este punto de apoyo quieto , caracteriza que no haya deslizamiento en la rodadura o que si que lo haya.



Las ecuaciones para el centro de masas son las siguientes:

$$F + N - Mg = 0 \tag{2.1}$$

$$Fr = Ma \tag{2.2}$$

Como la única fuerza existente en el eje de las x es la fuerza de rozamiento, esta fuerza es la que posibilita el movimiento horizontal del disco. Para el teorema del momento cinético, si tomamos momentos respecto al centro de masas obtenemos:

$$F \cdot R/2 - Fr \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \tag{2.3}$$

Por último, antes de resolver el sistema de ecuaciones, debemos poner la condición de rodadura sin deslizamiento, que es nuestra hipótesis de partida; en una rodadura sin deslizamiento el punto de contacto entre el suelo y el disco es el centro instantáneo de rotación, lo que implica que la aceleración del centro de masas (que gira en torno al punto de apoyo) es:

$$a = \alpha R$$

Son incógnitas N, Fr, a y α Con las cuatro ecuaciones anteriores podemos resolver el sistema con el objetivo de hallar el valor de Fr y poder comprobar si la hipótesis de partida es cierta. Sustituiremos el valor de Fr y la condición de rodadura sin deslizamiento en la ecuación del momento cinético:

$$F \cdot \frac{R}{2} - Ma \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

operando:

$$\frac{F}{2} - Ma = \frac{1}{2}Ma \rightarrow F = 3Ma \rightarrow a = \frac{F}{3M} = 30/60 = 0{,}5$$

entonces:

$$Fr = Ma = 15\text{N}$$

Por otro lado, la normal del plano es:

$$N = Mg - F = 60 - 30 = 30\text{N} \rightarrow \mu N = 0,2 \cdot 30 = 6\text{N}$$

Como se puede observar la Fr obtenido es mayor que μN, lo que quiere decir que la hipótesis es falsa y, en consecuencia, se puede afirmar que el cilindro rueda y desliza. A continuación pasaremos a resolver el problema considerando que el disco rueda y desliza. Esto implica que ya no se puede aplicar la condición $a = \alpha R$, pero sí se puede aplicar la expresión de la fuerza de rozamiento al deslizamiento:

$$Fr = \mu N = 0,2 \cdot 30 = 6 \text{ N}$$

El resto de ecuaciones, tanto el teorema del centro de masas 2.2 como el teorema del momento cinético 2.3 se mantienen ya que ha sido tomado en torno al centro de masas. Por tanto, despejando la aceleración de 2.2:

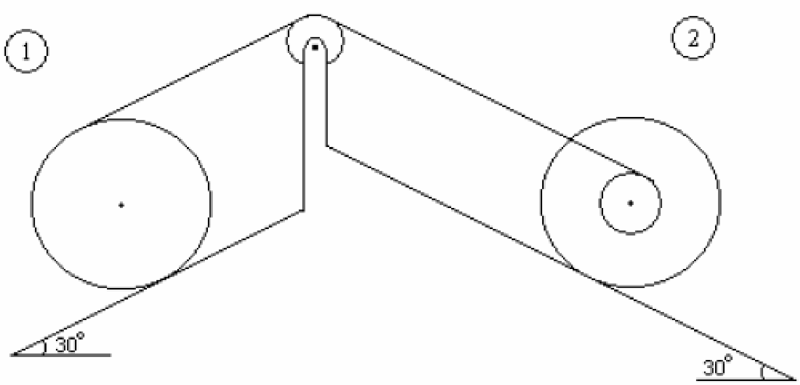
$$Fr = ma \rightarrow a = Fr/m = \frac{6}{6} = 1 \text{ m/s}^2$$

y despejando la aceleración angular de 2.3:

$$F/2 - Fr = \frac{1}{2}M\alpha \rightarrow \alpha = \frac{F - 2Fr}{M} = \frac{30 - 12}{6} = 3 \text{ rad/s}^2$$

2.4. Problema 4

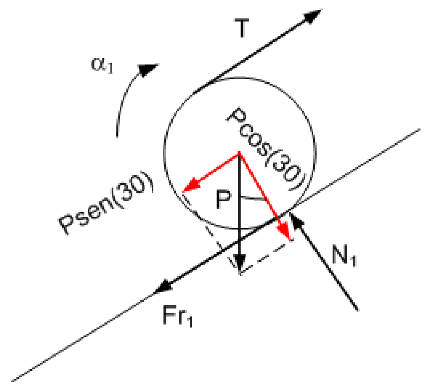
Un cilindro 1, de peso P y radio R, rueda sin deslizar, ascendiendo por un plano inclinado 30^o con la horizontal.Tiene arrollado sobre él un hilo que pasa por la polea superior, sin rozamiento y tiene su otro extremo arrollado sobre el tambor de radio $R/2$ de la rueda 2, de peso P y radio R, de momento de inercia $I_{G2} = \frac{PR^2}{2g}$, que rueda sin deslizar, descendiendo por el plano inclinado de la derecha, de ángulo 30^o con la horizontal. Se pide calcular la aceleración a_{G2} del centro de masas de la rueda 2. Se supone que el hilo no roza con la polea central.



SOLUCIÓN

En un problema de dinámica como éste hay que dibujar inicialmente el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los sólidos presentes en el problema. En este caso tenemos dos, así que habrá que realizar dos diagramas.

Para el primer cilindro podemos observar que hay varias fuerzas presentes; la tensión del hilo, la fuerza de rozamiento, el peso del cilindro y la normal que ejerce el plano sobre el cilindro. Además, dado que el cilindro está ascendiendo, la dirección de giro del mismo será la marcada en la figura. Las ecuaciones del teorema del centro de masas, de acuerdo a su diagrama de la derecha, serán las siguientes, tomando como ejes el propio plano y su normal:



$$T - Fr_1 - P\sin 30 = \frac{P}{g}a_1$$

$$N - P\cos(30) = 0$$

siendo a_1 la aceleración del centro de masas del cilindro. El sentido de Fr_1 no es conocido al no haber deslizamiento. Al despejar su valor podría salir negativo. Por otro lado, ya se puede plantear la ecuación del momento cinético. Si el sentido de giro marcado en la figura es el positivo, y tomamos momentos respecto al centro de masas, se tiene:

$$T \cdot R + Fr_1 \cdot R = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\alpha_1$$

Como se puede observar el momento efectuado por la fuerza de rozamiento Fr_1 es positivo, es decir, que el rozamiento de ser este su sentido verdadero estaría dando lugar a un momento favorable al sentido del movimiento. El peso y la normal no efectúan momento puesto que sus rectas soporte pasan por el centro de masas. También, podríamos plantear esta última ecuación tomando momentos respecto al Centro Instantáneo de Rotación

(CIR), que en este caso es el punto de contacto entre el cilindro y el plano al tratarse de un rodadura sin deslizamiento. Entonces la ecuación cambia no sólo en el lado izquierdo, sino también, en el lado derecho, puesto que el momento de inercia del cilindro debe corregirse por medio del Teorema de Steiner:

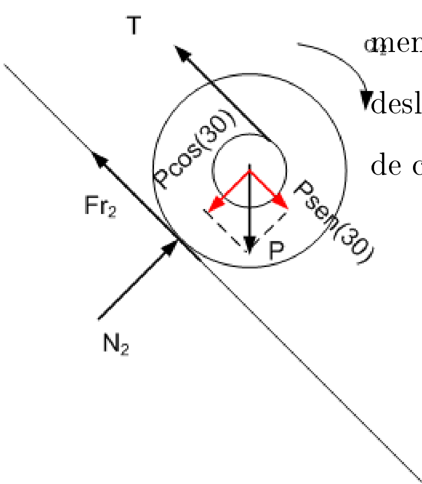
$$T \cdot 2R - P\sin(30) \cdot R = (\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2 + \frac{P}{g}D^2)\alpha_1$$

siendo D la distancia existente entre el centro de masas y el punto donde se toman momentos, en este caso, el CIR, resultando ser D= R y operando:

$$T \cdot 2R - P\sin(30) \cdot R = \frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2\alpha_1$$

Para terminar con las ecuaciones correspondientes a este cilindro, plantearemos la condición de rodadura sin deslizamiento:

$$a_1 = \alpha_1 R$$



A continuación pasaremos a plantear las ecuaciones de momento cinético, centro de masas y condición de rodadura sin deslizamiento para el cilindro 2 teniendo en cuenta su diagrama de cuerpo libre (figura de la izquierda):

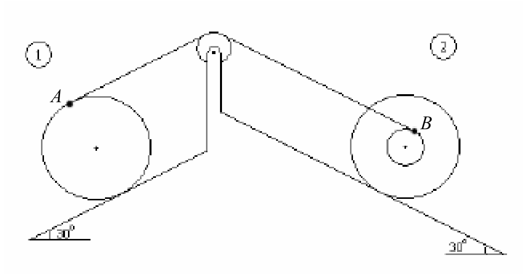
$$P\sin 30 - T - Fr_2 = \frac{P}{g}a_2$$

$$N - P\cos(30) = 0$$

$$Fr_2 \cdot R - T \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\alpha_2$$

$$a_2 = \alpha_2 R$$

donde Fr_2 es la fuerza de rozamiento en el plano de la derecha, a_2 es la aceleración del centro de masas del cilindro 2 y α_2 la aceleración angular del cilindro 2. La tensión es la misma que la que se planteó para el cilindro 1 puesto que el hilo es el mismo y no existe rozamiento en la polea. Los rozamientos son diferentes ya que



las superficies de los planos son distintas. Si contamos todas las incógnitas, veremos que hay un total de 8 para 7 ecuaciones(la ecuación $N - P\cos(30) = 0$ se cuenta una única vez). Esto implica que falta una ecuación por plantear. Dado que ambos cuerpos están unidos, sus aceleraciones no puedan ser independientes, sino que están relacionadas; será necesario plantear una ecuación de ligadura. En la figura se puede ver como el punto A y el punto B pertenecen al hilo y a su vez, el primero pertenece al cilindro 1 y el segundo, al 2. Todos los puntos del hilo deben tener la misma aceleración de traslación, lo que implica que los puntos A y B de los cuerpos rodantes tienen la misma aceleración tangencial y por tanto:

$$a_{tA} = \alpha_1 2R$$
$$a_{tB} = \alpha_2 \frac{3R}{2}$$
$$a_{tA} = a_{tB} \longrightarrow \alpha_1 2R = \alpha_2 \frac{3R}{2}\ ; \alpha_1 = \frac{3}{4}\alpha_2$$

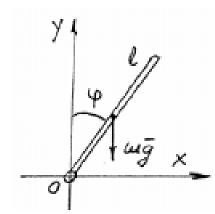
Con la ecuación de ligadura y las correspondientes a ambos cilindros se puede resolver el problema. La solución es:

$$a_1 = \frac{g}{25}\ a_2 = \frac{4}{75}g$$

2.5. Problema 5

Una varilla homogénea de longitud l y masa m está articulada en el punto O mediante una rotula.

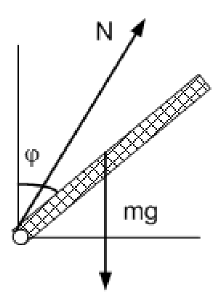
Si se deja caer desde su posición vertical (velocidad inicial nula), gira alrededor de O , en el plano vertical. En la posición de la figura, hallar su aceleración angular α y su velocidad angular ω.



SOLUCIÓN

Este ejercicio se puede resolver de dos maneras distintas; por medio del teorema del momento cinético, o por mediante el cálculo de la energía de un sistema. Inicialmente utilizaremos la primera manera.

Para ello necesitamos un diagrama de las fuerzas implicadas que se muestra en la figura. Como se observa, la reacción en la rótula, es decir, la reacción N es desconocida, por tanto, parece lógico que tomemos momentos respecto al punto O, y así evitaremos la intervención de N, ya que produce momento nulo en 0. Al tomar momentos respecto a 0 queda:



$$mgl\sin(\varphi) = [\frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{2})^2]\alpha$$

donde $l\sin(\varphi)$ es la distancia que existe entre la recta soporte del peso y el punto O y donde $m(\frac{l}{2})^2$ es la corrección por el teorema de Steiner del momento de inercia de la varilla al haber tomado momentos respecto al punto O que es el Centro Instantáneo de

Rotación. Operando y despejando α:

$$g\sin(\varphi) = \frac{1}{3}l\alpha \quad \alpha = \frac{3g\sin(\varphi)}{l}$$

Para poder hallar la ω es necesario tener en cuenta que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$y que $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, por tanto se puede expresar α en función de φ como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega$$

sustituyendo en la ecuación anterior el valor de α:

$$\frac{3g\sin(\varphi)}{l} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega$$

pasando el $d\varphi$ a la izquierda del igual, obtenemos una expresión integrable:

$$\int_0^{\varphi} \frac{3g\sin(\varphi)}{l} d\varphi = \int^{\omega} 0 d\omega\omega$$

$$-\frac{3g\cos\varphi}{l}]_0^{\varphi} = \frac{\omega^2}{2}$$

ya que en la posición inicial $\omega = 0$ y $\varphi = 0$, operando

$$\frac{3g}{l}(1 + \cos\varphi) = \frac{\omega^2}{2} \rightarrow \omega = \sqrt{2\frac{3g}{l}(1 + \cos\varphi)}$$

Otra manera de resolver el problema es por medio del cálculo de la energía cinética en el movimiento de rotación respecto a 0:

$$E_k = \frac{1}{2}[\frac{1}{12}ml^2 + (\frac{1}{2}l)^2 m]\omega^2$$

donde se ha corregido el momento de inercia para pasarlo a 0 v_G es la velocidad del centro de masas y ω la velocidad angular del sistema.v_G podemos expresarla como $\omega \cdot \frac{l}{2}$ y sustituyendo:

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\omega^2\frac{l^2}{4}$$

Por otro lado, la energía cinética se puede expresar como el trabajo de las fuerzas, que en este caso será igual al trabajo realizado por el peso al descender una altura de $l\cos\varphi$, por tanto, teniendo en cuenta ambas expresiones de la energía cinética:

$$E_k = mgl\cos\varphi = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{l^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

operando:

$$\omega = \sqrt{2\frac{3g}{l}(1+\cos\varphi)}$$

que es exactamente el mismo resultado que hemos obtenido por el método anterior.

Capítulo 3

DINAMICA NO INERCIAL

Denominamos sistemas de referencia inerciales a aquellos que están en reposo o se mueven con velocidad constante. Por otro lado, denominamos sistemas de referencia no inerciales aquellos que están acelerados. En esta parte nos concentraremos en problemas de dinámica donde tenemos sistemas de referencia no inerciales. Para abordar estos problemas necesitamos recordar ciertos conceptos de la cinemática relativa. Cuando una determinada partícula se mueve y su movimiento se observa desde un sistema de referencial no inercial, la aceleración de la partícula P se expresa como:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c \tag{3.1}$$

donde $\vec{a}_P$ es la aceleración de la partícula dada para el sistema inercial y donde $\vec{a}_a$, es la aceleración de arrastre $\vec{a}_r$ es la aceleración relativa de la partícula respecto al sistema no inercial y $\vec{a}_c$ es la aceleración de Coriolis. Recordemos brevemente que son cada una de estas aceleraciones. El movimiento de arrastre es el movimiento visto desde el sistema inercial que tiene el punto donde está situada la partícula el sistema de referencia no inercial. Imaginemos un disco (un frisbee) que se traslada y gira sobre su propio eje. Sobre él hay una partícula moviéndose a lo largo del diámetro. Si utilizamos como sistema de referencia el frisbee, únicamente veremos la partícula moverse a lo largo del diámetro. El movimiento de la partícula es relativo al frisbee. No obstante, el frisbee se está moviendo a su vez, si además estuviera acelerado (que lo está puesto que sabemos que está rotando), entonces diremos que el frisbee es un sistema de referencia no inercial. El movimiento que realiza el frisbee es el denominado movimiento de arrastre.

Por último, cuando el movimiento de arrastre tenga una componente de rotación, es decir, que el sistema de referencia no inercial rota con una cierta ω, existe además una aceleración denominada de Coriolis, que es dos veces el producto vectorial de la ω por la velocidad relativa de la partícula.

Por tanto, podemos expresar cada sumando de la ecuación 3.1 de la siguiente manera:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O1} + [\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O_1P}] + [\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{O_1P}]; \quad \vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}; \quad \vec{a}_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_r]$$

En definitiva, la aceleración respecto a un sistema inercial es la suma de la aceleración de arrastre o aceleración del sistema no inercial, la aceleración relativa y la aceleración de Coriolis.

No obstante, dado que éste es un libro de problemas de dinámica, necesitamos pasar las aceleraciones a fuerzas. Para ello simplemente multiplicaremos por la masa m de la partícula P objeto de nuestro estudio.

$$m\vec{a}_P = m\vec{a}_a + m\vec{a}_r + m\vec{a}_c$$

Por otro lado, si estamos examinando la dinámica de una partícula desde un sistema de referencia no inercial, la aceleración observable que será objeto de nuestro estudio, es la aceleración relativa y por tanto, la ecuación que tendremos que utilizar para resolver esta clase de problemas dinámicos será la siguiente:

$$m\vec{a}_P - m\vec{a}_a - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r \tag{3.2}$$

que podemos expresar también de la siguiente manera:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}_r$$

con $\vec{F}_i = \vec{F}_{ia} + \vec{F}_{ic}$ y $\vec{F}_{ia} = -m\vec{a}_a$, $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$ y donde $\vec{F}$ son todas aquellas fuerzas que están actuando sobre la partícula independientemente de que el sistema de referencia esté acelerado o no, $\vec{F}_i$ son aquellas fuerzas que surgen como consecuencia de que el sistema de referencia es no inercial y está acelerado. Son las denominadas **fuerzas de inercia** y tal y como se ve en la ecuación 3.2 tienen sentido contrario a las aceleraciones de Coriolis y de arrastre.

En los problemas que se resolverán en las próximas páginas se tendrá en cuenta este enfoque para abordar la solución de los mismos.

Resumen: Se elegirá un sistema de referencia (observador móvil) en general acelerado, no inercial, desde el cuál se resolverá el problema con más facilidad. Hay que conocer con claridad el movimiento de este sistema. En él, junto con las fuerzas $\vec{F}$ existentes en un sistema inercial, hay que tener en cuenta las fuerzas de inercia $\vec{F}_i$. La fuerza de inercia de arrastre $\vec{F}_ia$ puede tener los términos en el caso más general:

$$\vec{F}_{ia} = -m\vec{a}_a = -m(\vec{a}_{01} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times 0_1\vec{P} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times 0_1\vec{P})$$

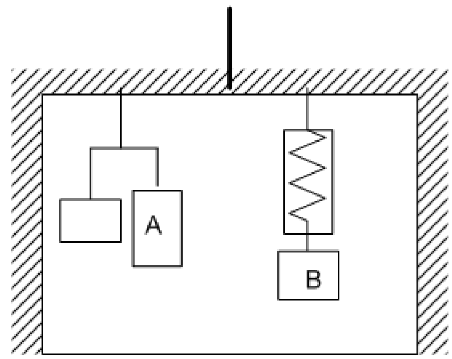
El primer sumando depende de la aceleración de traslación a_{01} del sistema y los otros dos de su rotación: el término tangencial $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times 0\vec{1P}$ y el normal(o fuerza centrífuga) $\omega \times \omega \times 0\vec{1P}$. La fuerza de inercia de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ depende de la ω de la rotación del sistema y de la velocidad relativa $\vec{v}_r$ de la partícula respecto al sistema móvil:

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -m2[om\vec{e}ga \times \vec{v}_r]$$

Cuando el triedro móvil no gira ($\omega = 0$)o la partícula no tiene movimiento relativo respecto al triedro móvil (equilibrio relativo con $\vec{v}_r = 0$), la $\vec{F}_{ic}$ es nula.

3.1. Problema 1

Dos paquetes A y B se pesan en dos básculas; el A en una báscula de brazo y el B en una de resorte. Las básculas están unidas al techo de un ascensor. Cuando el ascensor está parado, ambas básculas indican una masa de 15 kg. Puesto el ascensor en movimiento, se observa que la báscula de resorte indica una masa de 20 kg. Determinar 1º) la aceleración del ascensor 2º) la masa indicada por la báscula de brazo.



SOLUCIÓN

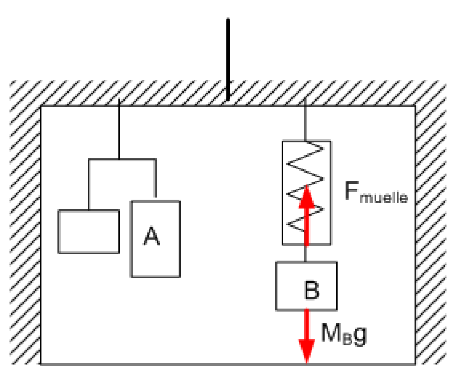
La báscula de muelle nos da la masa del bloque B mediante la medición del peso de dicho bloque. Cuando la fuerza recuperadora del muelle se equilibria con el peso del bloque, se puede hallar la masa. La indicación que marque la báscula será la fuerza medida dividida entre la aceleración de la gravedad.

$$F_{muelle} - M_B g = 0$$

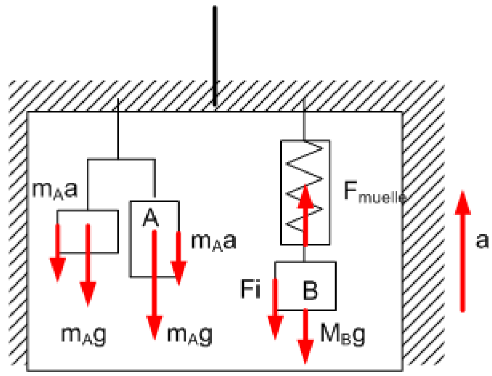
$$F_{muelle} = F_{medida} = M_B g \rightarrow \; M_B = \frac{F_{medida}}{g}$$

Situemos un sistema de ejes dentro del ascensor en reposo respecto a él. Cuando el ascensor se acelera, el sistema de ejes es un sistema acelerado o no inercial, que se mueve en traslación (es decir, sin ω de rotación).

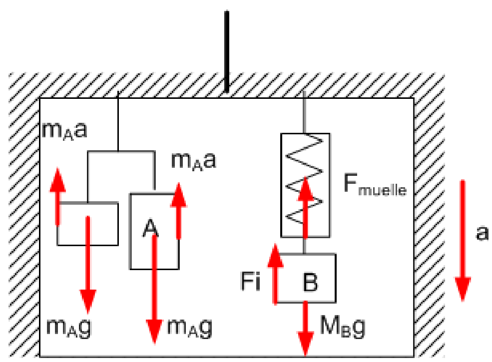
Cuando el ascensor está acelerado, aparece una fuerza de inercia $\vec{F}_{ia}$, debida al movimiento de arrastre del sistema y sólo a la aceleración del origen $\vec{a}_{01} = \vec{a}$ del ascensor y que tendrá sentido contrario al de esta aceleración y por tanto la fuerza medida por la báscula será la suma del peso del bloque y de la fuerza de inercia tal y como se puede ver en las figuras.



Ascensor Parado



Ascensor con aceleración hacia arriba



Ascensor con aceleración hacia abajo

Por tanto, teniendo en cuenta los datos del problema,

cuando el ascensor está parado, la masa es 15 kg y ésta será la masa del bloque B. No obstante cuando está en movimiento la masa es 20 kg, es decir:

$$F_{medida} - M_B g - F_i = 0$$

$$F_{medida} = M_B g - F_i$$

Si la masa medida es 20 kg, la F_{medida} será entonces $20g$, el peso del bloque ya sabemos que vale $15g$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$20g = 15g + F_i \rightarrow \ F_i = 5g$$

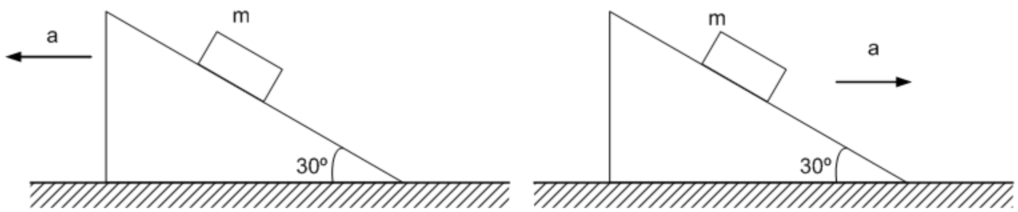
La fuerza de inercia vale $5g$ y tiene el mismo sentido y dirección que el peso del bloque, por tanto, el ascensor tiene aceleración hacia arriba. La fuerza de inercia depende de la masa del bloque B y de la aceleración del ascensor , por tanto:

$$F_i = 5g \rightarrow \; m_B a = 5g \rightarrow a = \frac{5g}{15} = g/3$$

Para el caso de la báscula de brazo, la masa marcada será la misma que en reposo ya que las fuerzas de inercia actúan por igual tanto en la masa que se debe medir como en la que equilibra. En el caso de que la aceleración del ascensor fuer hacia abajo, el esquema de fuerzas es el siguiente y el problema se resolvería de igual manera.

3.2. Problema 2

Un cuerpo de masa m se halla sobre un plano inclinado un ángulo de 30^o **sobre la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el peso y el plano es** μ**.**



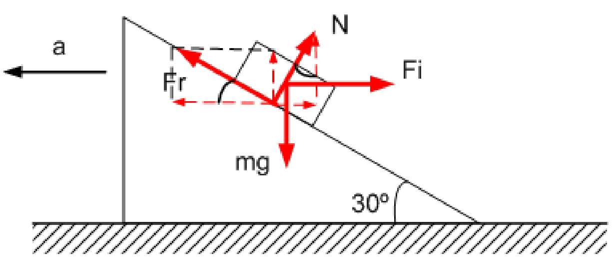
Hallar la maxima aceleración horizontal que se podría dar al conjunto sin que se produzca el deslizamiento relativo del cuerpo sobre el plano, teniendo en cuenta los dos sentidos posibles de movimiento.

SOLUCIÓN

Para resolver el problema plantearemos las ecuaciones y dibujaremos los diagramas para ambos casos. Tanto en un caso como en otro sabemos que no existe deslizamiento relativo del bloque respecto al plano inclinado. Si ponemos un sistema de referencia en el plano inclinado, (sería un sistema de referencia no inercial al estar acelerado horizontalmente) y no existe desplazamiento relativo entre el bloque y el plano, estamos diciendo que la aceleración relativa del bloque a_r respecto al plano es nula. Por tanto, esto es equivalente a decir lo siguiente:

$$\sum(\vec{F}+\vec{F_i}) = m\vec{a}_r = 0$$

Para saber la dirección y sentido de las fuerzas implicadas $\vec{F}$ y de la fuerza inercia, necesitamos realizar los diagramas de fuerzas.



Para el caso en el que el plano se mueve hacia la izquierda, la fuerza de inercia será sólo la de arrastre $\vec{F}_{ia}$, ya que no hay movimiento de rotación y $\vec{a}_c = 0$. Por otro lado, de los términos de arrastre, por ser $\omega = 0$, sólo queda el debido a la aceleración $\vec{a}_{01}$ de traslación del origen del triedro no inercial. Tendrá sentido hacia la derecha tal y como se muestra en la figura. Si proyectamos las fuerzas sobre unos ejes cartesianos x e y perpendiculares y paralelos al suelo, se tiene:

$$F_i - Fr\cos(30) + N\sin(30) = 0$$

$$mg - Fr\sin(30) - N\cos(30) = 0$$

recordando que las ecuaciones se igualan a cero puesto que la aceleración relativa del bloque respecto del plano es cero. Además, para resolver el problema es necesario tener en cuenta que estamos resolviendo el caso límite, en el que el bloque está a punto de deslizar para obtener el máximo valor de $\vec{a}$, por tanto la fuerza de rozamiento vale:

$$F_r = \mu N$$

Por otro lado, la fuerza de inercia debido a la aceleración de arrastre del plano valdrá:

$$F_i = ma$$

siendo a la aceleración del plano. Sustituyendo en las ecuaciones:

$$ma - \mu N\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{N}{2} = 0$$
$$mg - \mu\frac{N}{2} - N\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

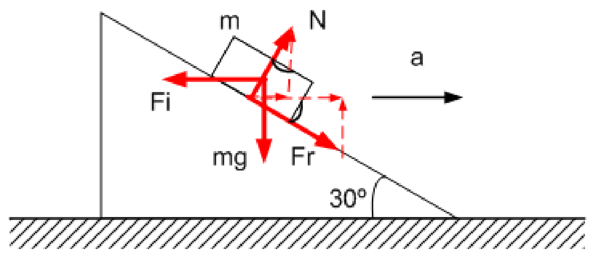
despejando N de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$N = \frac{2mg}{\mu + \sqrt{3}}$$
$$mg - \mu\frac{mg}{\mu + \sqrt{3}} - \frac{2mg}{\mu + \sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

despejando la aceleración:

$$a = g\frac{\sqrt{3}\mu - 1}{\sqrt{3} + \mu}$$

Para el caso en el que el plano se mueve hacia la derecha, el diagrama de fuerzas cambia ligeramente variando el sentido de $\vec{F_i}$ y las ecuaciones son:



$$F_i - Fr\cos(30) - N\sin(30) = 0$$

$$mg - Fr\sin(30) - N\cos(30) = 0$$

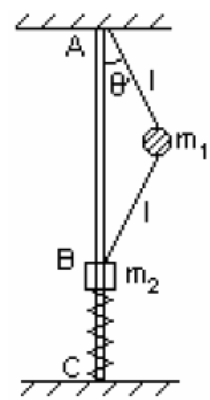
obteniendo el siguiente valor para la aceleración:

$$a = g\frac{\sqrt{3}\mu + 1}{\sqrt{3} + \mu}$$

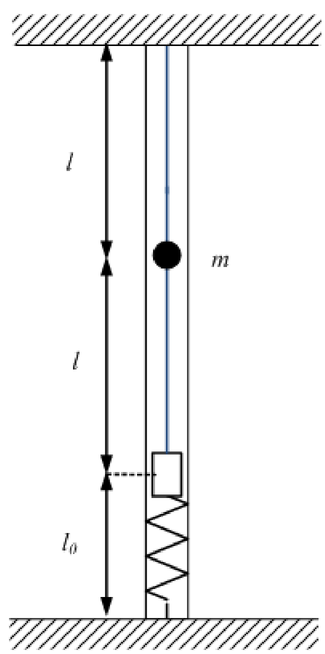
3.3. Problema 3

Un regulador centrífugo consta de dos hilos de longitud l y peso despreciable, ambos unidos a una masa m_1. Uno de ellos esta unido a un extremo fijo A de un eje vertical y el otro hilo a una masa m_2 que puede deslizar sin rozamiento por dicho eje.

La masa m_2 está unida también a un resorte de constante k, unido a su vez por el otro extremo a un punto fijo C. La longitud del resorte en reposo es l_0. Hallar la longitud que se ha alargado dicho resorte cuando el sistema gira a una velocidad angular ω.

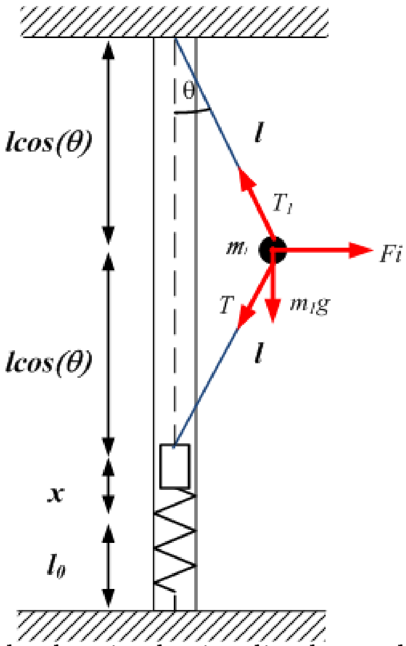


SOLUCIÓN



Para entender este problema es necesario que veamos como
se encuentra el oscilador armónico en la posición inicial. Como se observa en la figura, el

ángulo θ es cero, al estar las varillas que sostienen la bola en vertical coincidentes con la guía por donde se mueve el bloque de masa m_2



Cuando el muelle comienza a oscilar, necesariamente la bola asciende y desciende produciéndose un giro en torno a la guía. Las varillas se separan de la vertical y comienzan a formar un cierto ángulo con ella. Cuando se alcance la situación de equilibrio, las varillas formarán un cierto ángulo θ y se producirá un giro con velocidad angular ω.

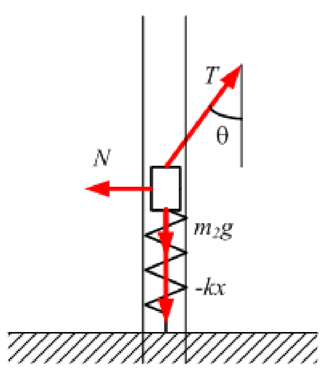
No obstante, cuando se ha alcanzado esta situación de equilibrio, no conocemos la longitud que se ha alargado el muelle. Por ello, teniendo la situación inicial y la de equilibrio, si podemos establecer ciertas relaciones entre las longitudes implicadas y el ángulo θ:

$$2l + l_0 = 2l\cos(\theta) + l_0 + x$$

despejando x:

$$x = 2l(1 - \cos(\theta)) \tag{3.3}$$

Sin embargo, el ángulo θ depende de la velocidad angular ω y de las masas de la bola y el bloque, por tanto, es necesario resolver el problema dinámico y estudiar las fuerzas implicadas para hallar las incógnitas.

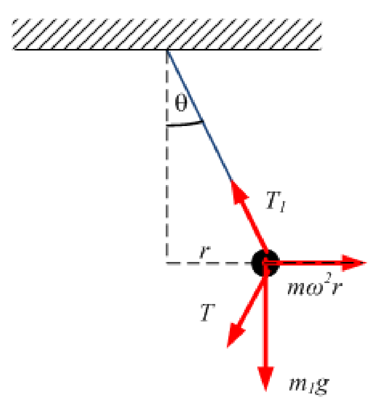


Situemos un sistema de referencia no inercial con su origen en el extremo inferior en el suelo y con un eje coincidente con el eje mecánico vertical y los otros dos horizontales, uno en el plano del dibujo y el otro perpendicular, de modo que gira con la velocidad angular $\vec{\omega}$ fr m_1. Cuando la masa m_1 queda en reposo para este sistema, sobre ella actuará sólo un término de $\vec{F_i}$, el debido a la aceleración normal $[\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{0_1 P}]$, ya que el origen del triedro no se traslada ($\vec{a}_{01} = 0$) y que $\omega \vec{=} cte$, con lo que $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$. Por otro lado no existe $\vec{F}_{ic}$ ya que la aceleración de Coriolis es nula, porque no existe movimiento relativo ($\vec{v}_r = 0$). Sin embargo sobre la masa m_2 no hay fuerzas de inercia ya que este término se anula puesto que m_2 está sobre el propio eje de giro y su aceleración normal en el giro es nula. Sólo existen sobre ella las $\vec{F}$ dadas por T, N y $m_2 g$ y la fuerza elástica de recuperación $-kx$. En la figura siguiente tenemos las fuerzas que actúan sobre el bloque m_2. Proyectando las fuerzas sobre unos ejes cartesianos obtenemos:

$$N - T\sin(\theta) = 0, \tag{3.4}$$

$$m_2 g + kx - T\cos(\theta) = 0 \tag{3.5}$$

Hay que recordar que ambas ecuaciones están igualadas a cero porque el bloque se encuentre en equilibrio relativo en el momento estudiado.La normal, reacción de la guía sobre el bloque existe debido a que es necesario que exista una fuerza que contrarreste la componente horizontal de la tensión, si no, el bloque tendría un movimiento hacia la derecha. Al dibujar las fuerzas que actúan sobre la bola, será necesario considerar la de inercia debido al giro de la guía. Esta fuerza de inercia se conoce con el nombre de fuerza centrífuga y es debido, como ya se ha dicho, a la existencia de una aceleración de arrastre de rotación del sistema no inercial. Proyectando las fuerzas tenemos:



$$T_1\sin(\theta) + T\sin(\theta) - F_i = 0, \tag{3.6}$$

$$m_1 g + T\cos(\theta) - T_1\cos(\theta) = 0 \tag{3.7}$$

como se observa, ambas ecuaciones están igualadas a cero. En el eje y, porque no existe movimiento en ese eje, y en el eje x, debido que no existe movimiento relativo entre la bola y el sistema no inercial. Tanto la guía vertical como la bola están girando con una cierta ω. La fuerza de inercia centrífuga en este caso toma el valor:

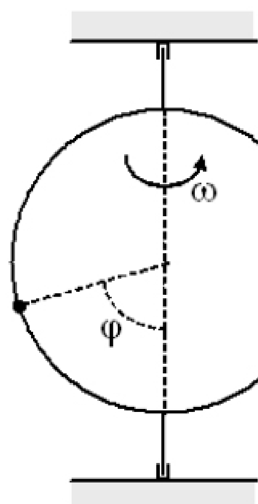
$$F_i = m\omega^2 r \tag{3.8}$$

siendo r el radio de curvatura que en este caso vale $l\cos(\theta)$. Con las ecuaciones 3.6,3.7, 3.9 ,3.4, 3.5 y 3.3, se resuelve el problema llegando a un valor de x de:

$$x = \frac{2(m_1\omega^2 l - (m_1 + 2m_2)g)}{m_1\omega^2 + 4k}$$

3.4. Problema 4

Una pequeña bola de masa $0,5$ kg esta engarzada en una guía circular por la que puede deslizarse sin rozamiento. Hallar el ángulo y la acción que la guía ejerce sobre la bola cuando aquella gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad de 4π rad/s, sin deslizar la bola por la guía. Radio de la guía $0,15$ m y $g = 9,81$ m/s^2.

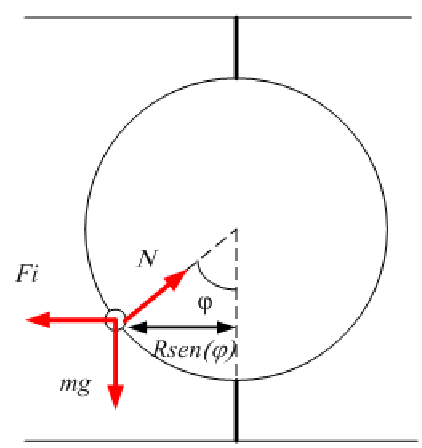


SOLUCIÓN

En este problema la bola está moviéndose por la guía circular hasta que para un cierto valor del ángulo φ la bola ya no desliza, sino que se encuentra en una situación de reposo relativo con respecto a la guía. No obstante, la bola se mueve con la guía, puesto que ésta está girando, pero si establecemos un sistema de referencia no inercial con su origen en el centro de la guía, un eje coincidente con el diámetro vertical y los otros dos horizontales, uno contenido en el plano de la guía y otro perpendicular a este plano. Este sistema gira con la ω de la guía, ésta permanece en reposo para un observador subido a este sistema de referencia. Cuando la bola queda en reposo en una cierta posición de la guía, permanece en reposo para este sistema de observación. Como vamos a estudiar esta posición de equilibrio desde el sistema de ejes acelerado no inercial, deberemos tomar en cuenta la existencia de fuerzas de inercia. De la fuerza de inercia de arrastre $\vec{F}_{ia} = -m[\vec{a}_{01} + (\frac{d\omega}{dt} \times \vec{0_1P}) + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{0_1P}]$ no existe el término de aceleración de traslación del origen O_1 del triedro, ya que 0_1 permanece siempre en reposo ($\vec{a}_{01} = 0$). Tampoco existe el término tangencial de la rotación porque ω es constante ($\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$). Sólo tenemos la fuerza centrífuga, término normal de la rotación, que será perpendicular al eje de giro de módulo $m\omega^2 r$, donde r toma el valor $R\sin\varphi$ como se aprecia en la figura, y de sentido hacia afuera. La Fuerza de inercia de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ es nula porque hay reposos relativo ($\vec{v}_r = 0$). Por tanto, para resolver el problema, habrá que tener en cuenta que la suma de las fuerzas de inercia y de las fuerzas debe ser nula:

$$\sum(\vec{F} + \vec{F}_i) = 0$$

Proyectando las fuerzas de acuerdo al esquema de la figura, tenemos:



$$mg - N\cos(\varphi) = 0, \tag{3.9}$$

$$F_i - N\sin(\varphi) = 0 \tag{3.10}$$

y como:

$$F_i = m\omega^2 R\sin(\varphi)$$

teniendo en cuenta esta última ecuación, podemos hallar el valor de N sustituyendo F_i en 3.10:

$$\sin(\varphi) - N\sin(\varphi) = 0 \rightarrow N = m\omega^2 R = 11,84 \text{ N}$$

Por otro lado, de la figura podemos observar que la tangente del ángulo φ es el cociente entre la fuerza inercia y el peso de la bola:

$$\tan(\varphi) = \frac{F_i}{mg} = \frac{m\omega^2 R\sin(\varphi)}{mg} = \frac{\omega^2 R\sin(\varphi)}{g}$$

despejando el coseno de φ:

$$\frac{\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 R\sin(\varphi)}{g} \rightarrow \cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R} \rightarrow \varphi = 65,5^{\text{o}}$$