FÍSICA I

MINAS

Asignatura: FÍSICA-I

Profesor: Borja Nájera

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

CINEMÁTICA

CINEMÁTICA

A.1) MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME : (a = 0)

$$v = cte. = v_0$$
$$s = s_0 + v_0 t$$

A.2) MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO : (a = cte)

$$v = v_0 + at$$
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a (s - s_0)$$

B.1) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME : (α= 0)

$$\overrightarrow{v_P} = \omega R \vec{t}$$
$$\overrightarrow{a_P} = \omega^2 R \vec{n}$$
$$\omega = cte. = \omega_0$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t$$

B.2) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO : (α = cte)

$$\overrightarrow{v_P} = \omega R \vec{t}$$
$$\overrightarrow{a_P} = \omega^2 R \vec{n} + \alpha R \vec{t}$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + ½ \alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0)$$

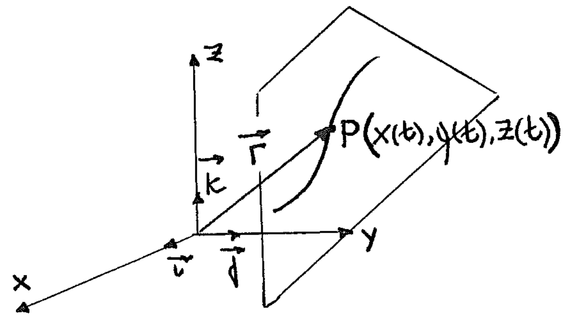
ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
TELEFS. 91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: Física-I
Profesor: Borja Nájera

CINEMÁTICA

1.- TRAYECTORIA, LEY HORARIA, ECS. HORARIAS

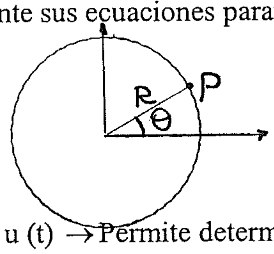


$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ → triedro fijo

<u>VECTOR DE POSICIÓN</u> → $\vec{r}=\vec{r}(t)$ → depende del tiempo transcurrido y marca la posición de P.

<u>TRAYECTORIA</u> → es la curva que describe la partícula. Por tanto, matemáticamente, <u>es la ecuación de una curva</u>.

Lo normal es darla mediante sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$. <u>No permite conocer el movimiento</u>



$x = R\cos\theta$
$y = R\,\text{sen}\,\theta$ → $x^2+y^2=R^2$ (implícita)

<u>LEY HORARIA</u> → $u = u(t)$ → Permite determinar el movimiento perfectamente. $\begin{cases} x = x(u) = x(t) \\ y = y(u) = y(t) \\ z = z(u) = z(t) \end{cases}$.

→ $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ (*para cada tiempo conozco la posición de P).*

2.- VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

- CARTESIANAS:

$$*\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

<u>nota</u>: $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sería: $\frac{dx(t)\vec{i}}{dt} + \ldots = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + x(t)\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \ldots = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i}$, pues $\vec{i}$ es cte. tanto en dirección como en módulo.

ACADEMIA CASTIÑEIRA

CH castiñeira

SANTIAGO RUSIÑOL, 4

TELEFS. 91 533 82 01 - 91 534 16 64

28040 MADRID

MINAS

Asignatura: Física-I

Profesor: Borja Nájera

CINEMÁTICA

$$* \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

- TRIEDRO INTRÍNSECO → Cambia en cada punto de la curva, o sea, cada punto de la curva lleva asociado su triedro intrínseco. (Dibujo)

Hay veces que es mejor expresar la velocidad y la aceleración no según sus componentes $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, sino según sus componentes del triedro intrínseco $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.

Este triedro, a diferencia del $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, es un triedro MÓVIL, es decir, en cada punto de la trayectoria hay un triedro intrínseco distinto (varían las direcciones dependiendo del punto donde esté). Definimos, por tanto, en cada punto el triedro intrínseco de esta manera:

- $\vec{t}$: es un vector UNITARIO ***tangente*** a la curva en ese punto
  $\vec{n}$: es un vector UNITARIO ***normal*** a la curva y "hacia dentro", perpendicular al vector $\vec{t}$.
- $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Vector UNITARIO ***binormal***.

De Geometría diferencial: $s = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = s(t)$

Fórmulas de Frenet: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$ $\quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$ siendo ρ el radio de curvatura

↳ característico de cada curva (dibujo)

$$-\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\vec{v}|} = v \cdot \vec{t}$$ (la velocidad es siempre un vector tangente a la curva)

$$-\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{t}) = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \quad ; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad ; \quad \underline{nota}: \frac{d\vec{t}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\frac{1}{\rho}\vec{n}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\vec{v}|} = \frac{v}{\rho}\vec{n}$$

La $\vec{a_t}$ indica cómo varía el módulo de la velocidad.

La $\vec{a_n}$ indica cómo varía la dirección de la velocidad.

- $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds} \cdot \underbrace{\dfrac{ds}{dt}}_{|\vec{v}|} = v\dfrac{dv}{ds} \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a\,ds \rightarrow ½(v^2 - v_0^2) = a(s - s_0) \rightarrow$

$\rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(s - s_0) \end{aligned}}$$

B) MOVIMIENTO CIRCULAR

"arco = radio · ángulo" $\rightarrow$ $s = R(\theta - \theta_0)$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{t} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{t} = \omega R \vec{t}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \alpha R \vec{t} + \omega^2 R \vec{n}$$

En el movimiento circular se definen los términos:

- $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{k} = \omega\vec{k}$ $\Rightarrow$ VELOCIDAD ANGULAR
- $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} = \alpha\vec{k}$ $\Rightarrow$ ACELERACIÓN ANGULAR

Con estas definiciones podemos calcular la velocidad y aceleración en un punto P como:

- $\vec{v^P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \cdot R\vec{t}$

- $\vec{a^P} = \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\vec{a_n}} + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OP}}_{\vec{a_t}} = \omega^2 R\,\vec{n} + \alpha R\,\vec{t}$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
TELEFS. 91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: Física-I
Profesor: Borja Nájera

CINEMÁTICA

Es decir, <u>AUNQUE UN MÓVIL SE MUEVA CON VELOCIDAD CTE. EN MÓDULO (por ejemplo a 100 Km/h) PUEDE TENER ACELERACIÓN DISTINTA DE CERO.</u>

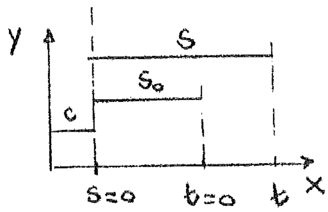
3.- TRAYECTORIAS PLANAS Y ALABEADAS (NO PLANAS)

$$\vec{b}\begin{cases}\text{CTE} \rightarrow \text{Trayectoria plana .Si además } \rho = \text{cte.} \rightarrow \text{plana circular}\\ \text{NO CTE.} \rightarrow \text{Trayectoria alabeada.Si además } \rho = \text{cte.} \rightarrow \text{helice circular}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{\left|\vec{v} \wedge \vec{a}\right|}}$$

4.- CASOS PARTICULARES DE MOVIMIENTOS.

A) MOVIMIENTO RECTILÍNEO



$\vec{r} = (c + s)\,\vec{i}$

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{i}$

$\vec{a} = \vec{a_t} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{i}$, puesto que al ser $\rho = \infty$, es $\vec{a_n} = \vec{0}$.

A.1) MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME $a = 0$

- $a = 0 \rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{ds}{dt} = \text{cte} = v = v_0$
- $\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v_0\, dt \rightarrow s - s_0 = v_0 t$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = \text{cte.} = v_0 \\ s = s_0 + v_0 t \end{array}}$$

A.2) MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (a=cte)

- $a = \text{cte} \rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = \text{cte} = dv/dt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \rightarrow v - v_0 = at$
- $v = v_0 + at = ds/dt \rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \rightarrow s - s_0 = v_0 t + 1/2\, a t^2$

CINEMÁTICA

Con estas definiciones podemos calcular la velocidad y aceleración en un punto P como:

- $\vec{v}^{p} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \cdot R\, \vec{t}$

- $\vec{a}^{p} = \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\vec{a}_n} + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OP}}_{\vec{a}_t} = \omega^2 R\, \vec{n} + \alpha R\, \vec{t}$

B.1) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME $\alpha = 0 \rightarrow \omega = \text{cte.}$

$$\vec{v}^{p} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega\, R\, \vec{t}$$

$$\vec{a}^{p} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \omega^2 R\, \vec{n} = \vec{a}_n \text{ , pues al ser } \omega = \text{cte} \rightarrow \vec{a}_t = 0.$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega\, dt \rightarrow \theta - \theta_0 = \omega\, t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}^{P} = \omega\, R\, \vec{t} \\ \vec{a}^{P} = \omega^2 R\, \vec{n} \\ \alpha = 0 \\ \omega = \text{cte.} = \omega_0 \\ \theta = \theta_0 + \omega t \end{array}}$$

B.2) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO $\alpha = \text{cte.}$

$$\vec{v}^{P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega R\, \vec{t}$$

$$\vec{a}^{P} = \omega^2 R\, \vec{n} + \alpha R\, \vec{t} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\alpha = \text{cte.} = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha\, t$$

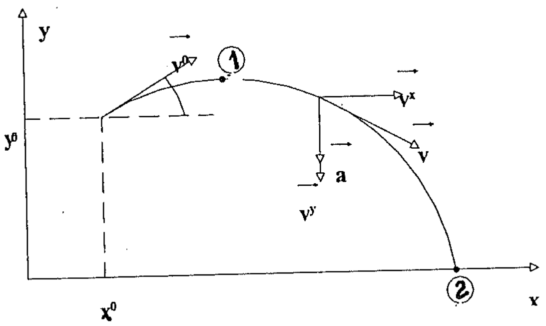
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha\, t \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\, dt \rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + ½\, \alpha\, t^2$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\, d\theta \rightarrow ½\, (\omega^2 - \omega_0^2) = \alpha\, \theta$$

CINEMÁTICA

$$\vec{v}^p = \omega R \vec{t}$$
$$\vec{a}^p = \omega^2 R \vec{n} + \alpha R \vec{t}$$
$$\alpha = \text{cte.}$$
$$\omega = \omega_o + \alpha t$$
$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \tfrac{1}{2} \alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \alpha \theta$$

C) TIRO PARABOLICO



En el tiro parabólico el movimiento de la partícula es la composición de dos movimientos: según "x" es un movimiento rectilíneo y uniforme y según "y" es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Según x

- $a_x = 0$
- $v_x = \text{cte.} = v_o \cos\alpha = \dfrac{dx}{dt}$
- $\int_{x_o}^{x} dx = v_o \cos\alpha \int_0^t dt \rightarrow x = x_o + v_o \cos\alpha \; t$

Según y

- $a_y = -g = \dfrac{dv_y}{dt}$
- $\int_{v_o \operatorname{sen}\alpha}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \rightarrow v_y = v_o \operatorname{sen}\alpha - g t$
- $\int_{y_o}^{y} dy = \int_0^t (v_o \operatorname{sen}\alpha - gt)\, dt \rightarrow$

$$\rightarrow y = y_o + v_o \operatorname{sen}\alpha \, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

CINEMÁTICA

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Luego las ecuaciones horarias del movimiento son $\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t \\ y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

De estas ecuaciones, si despejo t de la primera: $t = \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}$ y lo meto en la segunda, obtengo la ecuación implícita de la trayectoria: $y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$, (opero un poco para ponerlo de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y ver que es una parábola)

$$y = y_0 + \operatorname{tg}\alpha(x - x_0) - \frac{g}{2 v_0 \cos^2\alpha}(x^2 + x_0^2 - 2 x x_0) = ..$$

$$\ldots\ldots\ldots = -\frac{g}{2 v_0 \cos^2\alpha} x^2 + \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g x_0}{v_0^2 \cos^2\alpha} \right) x + \left(-\operatorname{tg}\alpha\, x_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \right) = \mathbf{a x^2 + b x + c}$$

En el tiro parabólico hay 2 "puntos especiales"

Punto 1: es el punto de y_{max}. En ese punto $v_y = 0 \rightarrow v_0 \operatorname{sen}\alpha - g t^* = 0 \rightarrow t^* = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$ y una vez que tengo el tiempo en ese punto, metiéndolo en las ecuaciones obtengo lo que quiera en ese punto (velocidad, coordenada x, coordenada y).

Punto 2: es el punto de x_{max}. En ese punto $y = 0$ (OJO!!! $v \neq 0$). $\rightarrow$

$0 = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^{**} - \frac{1}{2} g t^{**2}$ $\rightarrow$ despejo t** y una vez que tengo el tiempo, metiéndolo en las ecuaciones obtengo lo que quiera en ese punto (velocidad, coordenada x, coordenada y).

a : >0 ∪
<0 ∩
$=0$ —

b : $=0$
$\neq 0$ Ve $x = -\frac{b}{2a}$

c : $=0$ pasa por origen
$\neq 0$ no pasa

5.- MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'}$

Los ejes x', y', z' están "clavados en el sólido", es decir, se mueven con la $\vec{\omega}$ del sólido.

Velocidad y aceleración de un punto P, a partir de la velocidad y la aceleración de O:

- $\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{V_{o'}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$
- $\overrightarrow{a_p} = \overrightarrow{a_{o'}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\overline{a_n}} + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OP}}_{\overline{a_t}}$

CAMPO DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES (velocidad y aceleración de un punto a partir de la velocidad y aceleración de otro punto):

- $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}) + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{BA}$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

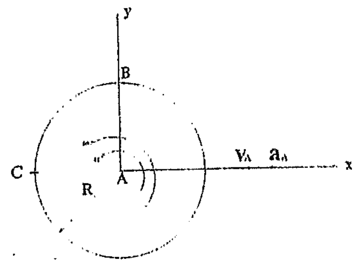
SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

Movimiento plano

Ejemplo: *Calcular la velocidad y la aceleración de B a partir de las de A. Calcular la velocidad y la aceleración de C a partir de A y a partir de B.*

$$\begin{cases} \vec{\omega} \text{ dirección cte.} \Rightarrow \vec{\alpha} \,//\, \vec{\omega} \\ \vec{v_p} \cdot \vec{\omega} = 0 \ \forall p \end{cases}$$



Rotación pura (sin traslación)

- $\overrightarrow{v_B} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{a_B} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}) + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}) + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{BA}$

Las trayectorias de los puntos del sólido son circunferencias de centro en B (fijo) y radio el que sea.

Traslación pura

$$\begin{cases} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{\alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{v_B} = 0$$

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}) + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a_B}$$

6.- MOVIMIENTO RELATIVO

$$\underbrace{\overrightarrow{v_p}}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\overrightarrow{v_p}'}_{\text{RELATIVA}} + \underbrace{\overrightarrow{v_p}}_{\text{ARRASTRE}} = \underbrace{\overrightarrow{v_p}'}_{\text{RELATIVA}} + (\overrightarrow{v_{o'}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{a_p}}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\overrightarrow{a_p}'}_{\text{REALTIVA}} + \underbrace{\overrightarrow{a_{p,\text{arrastre}}}}_{\text{ARRASTRE}} + \underbrace{\overrightarrow{a_{cor}}}_{\text{CORIOLIS}} \quad \text{siendo} \begin{cases} \overrightarrow{a_{cor}} = 2(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_p}') \\ \overrightarrow{a_{p,\text{arrastre}}} = \overrightarrow{a_{o'}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{O'P} \end{cases}$$

Siempre proyectaremos en el sistema que más cómodo sea, a no ser que nos lo impongan.

ACADEMIA CASTIÑEIRA

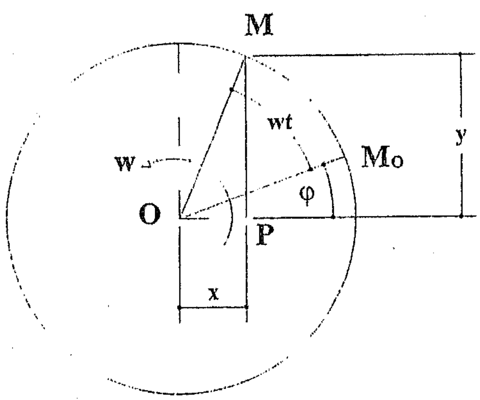
SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

7.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento que se repite en intervalos de tiempo iguales, se le denomina *periódico.*
Concretamente a estos intervalos de tiempo en los que se repite el movimiento, se les llama *periodos* (T), siendo la unidad corriente de expresión segundos (s).
Se denomina *frecuencia* (f), al número de periodos por unidad de tiempo, siendo la unidad corriente los hertz (Hz) y su expresión→ $f = \frac{1}{T}$.
Se considera un punto M que se mueve sobre una circunferencia de radio A, con una determinada *velocidad angular* "ω" y sea P la proyección en cada instante del punto M sobre el diámetro horizontal OX.

El movimiento realizado por el punto P se denomina ***MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.***



Elongación (x) – distancia del punto móvil M al punto de equilibrio O, que viene dada por la expresión:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A: amplitud o elongación máxima
$(\omega t + \varphi)$: fase del movimiento
φ : fase inicial

En todo el movimiento armónico se cumple: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

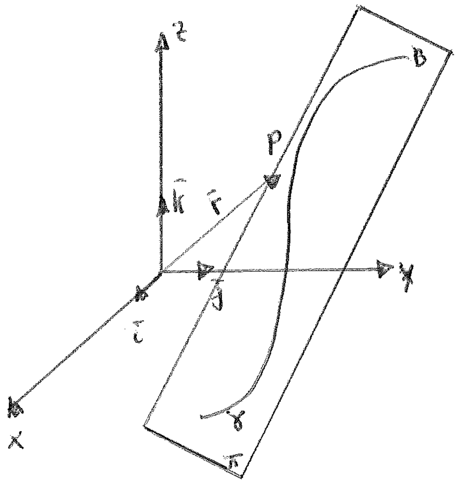
La velocidad y la aceleración de este movimiento tienen como expresiones:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ a &= \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{aligned}}$$

Lo anterior es válido considerando la proyección de M sobre OY:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ v &= \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a &= \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y \end{aligned}}$$

CINEMÁTICA



$\vec{r}$ = trayectoria → vector posición

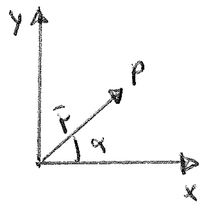
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cdot\cos\alpha \\ y = R\cdot\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} x^2+y^2=R^2 \rightarrow \text{Ecuación Trayectoria Circunferencia}$$



$|\vec{r}| = R$

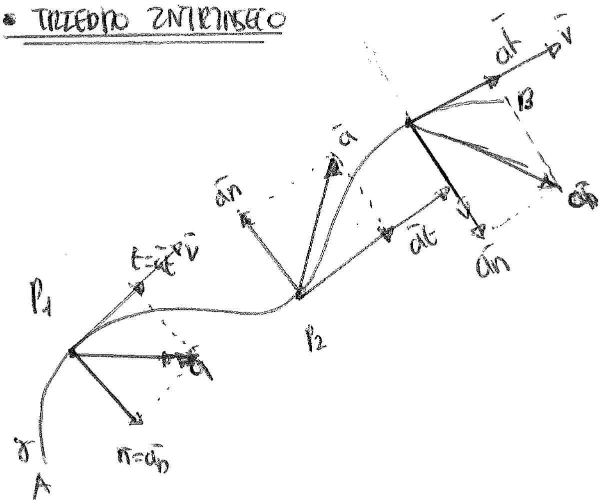
ECUACIONES HORARIAS

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

TRIEDRO INTRÍNSECO



$\vec{v} = v\cdot\vec{t}$

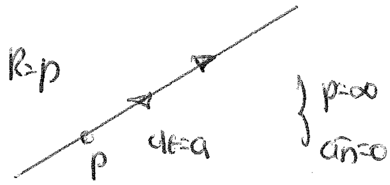
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{t} + \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} \qquad a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ vectores unitarios

• MOVIMIENTO RECTILÍNEO

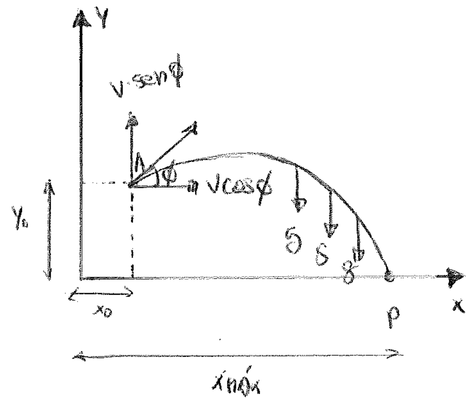
A) M.R. UNIFORME $v=cte$ / $a=0$

B) M.R. UNIFORMEMENTE ACELERADO $a=cte$



• TIRO PARABÓLICO

En el tiro parabólico el movimiento de la partícula es la composición de dos movimientos según (x) es un movimiento rectilíneo uniforme y según (y) es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



Según (x)

$$a_x=0 \to a_x = dv_x/dt \to \int_{v_0}^{v} dv_x = \int_0^t a_x\,dt \to v_x = v_0\cdot\cos\phi + \cancel{a_x}^{\,0}\cdot t = v_0\cos\phi$$

$$v_x = dx/dt \to \int_{x_0}^{x} dx = v_0\cdot\cos\phi\int_0^t dt \to x = x_0 + v_0\cos\phi\, t$$

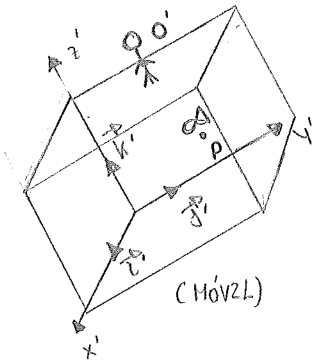
Según (y)

$$a_y=-g \to a_y = dv_y/dt \to \int_{v_0}^{v} dv_y = \int_0^t g\,dt \to v_y = v_0\,\mathrm{sen}\phi - gt$$

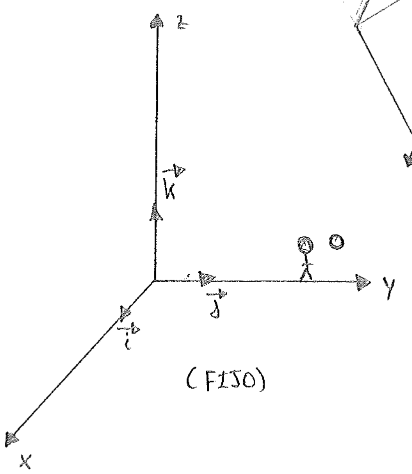
$$v_y = dy/dt \to \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (v_0\,\mathrm{sen}\phi - gt)\,dt \to y = y_0 + v_0\,\mathrm{sen}\phi\, t - 1/2\, g t^2$$

Cuando eliminamos el tiempo (t) obtenemos la ecuación de la trayectoria $y=ax^2+bx+c$. Siempre es un movimiento con una aceleración constante en un eje y nula en el otro eje.

- MOVIMIENTO RELATIVO



(MÓVIL)



(FIJO)

O = observador en el sistema fijo

O' = observador en el sistema móvil

$\vec{V_p} = \vec{V_p'} + \vec{V_{ARR}}$ → Velocidad de Arrastre (del observador fijo)

↳ Velocidad Relativa (del observador móvil)

$\vec{a_p} = \vec{a_p'} + a_{cor} + \vec{a_{ARR}}$ → Aceleración de Arrastre (del observador fijo)

↳ Aceleración Relativa (del observador móvil)

$\vec{a}_{CORIOLIS} = 2\,\vec{\omega}_{ARR} \times \vec{V_p'}$

- Velocidad Relativa: es la que ve un observador en el sistema móvil que se mueve en el sistema de referencia móvil
- Velocidad de Arrastre: es la que ve un observador en el sistema fijo una vez que hemos parado el movimiento de la partícula en el sistema de referencia móvil
- Aceleración Relativa: es la que ve un observador en el sistema móvil que se mueve en el sistema de referencia móvil
- Aceleración de Arrastre: es la que ve un observador en el sistema fijo una vez que hemos parado el movimiento de la partícula en el sistema de referencia móvil

La aceleración de Coriolis es cero cuando la ω_{ARR} no existe, $V_p' = 0$ o la $\omega_{ARR} \parallel V_p'$. Para se halla ω_{ARR} tiene que girar el sistema móvil respecto del sistema fijo.

- El punto P se mueve dentro del sistema coordenadas móvil, por tanto, no podemos conocer la velocidad del punto P desde el sistema coordenadas fijo.

- La $\omega_{ARRASTRE} \rightarrow \vec{\omega_A}$ = velocidad angular que hace que los ejes móviles giren en torno al sistema coordenado fijo.

- En movimientos circulares

- $|\vec{A}| = (w_0)^2 \cdot R + w^2 R$ → Galileo, es un incompleto pero relativamente válido

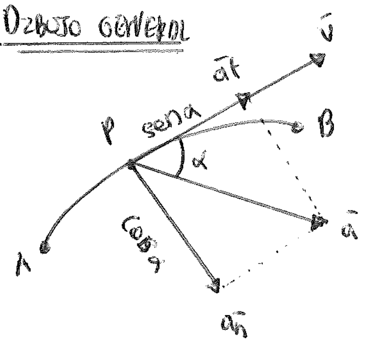
- $|\vec{a}| = (w'_0)^2 \cdot R + w^2 \cdot R + 2w'_0 \cdot wR$ → Coriolis, se da cuando el sistema de referencia gira

- Ecuaciones con las que debemos trabajar en el movimiento relativo

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_a = \vec{v}' + \vec{v}_0' + (\vec{w} \times \vec{r}')$$ V_a = velocidad arrastre → V_0'

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_a + \vec{a}_c = \vec{a}' + \vec{a}_0' + w(\vec{w} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{v}'$$

- Dibujo general



$\vec{a}$ $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\, |\vec{a}| = \cos\alpha \\ \cos\alpha\, |\vec{a}| = \text{sen}\,\alpha \end{cases}$

- Movimiento relativo (datos importantes)

Para calcular $v_P = v_P' + v_{ARR}$ poner un hombre encima del sistema de referencia, para calcular V_P' será el movimiento que tiene la partícula. Ponemos ahora el hombre fuera del sistema de referencia y pensamos el movimiento de la partícula para calcular la V_{ARR}. El mismo proceso se realiza para $a_P = a_P' + a_{ARR} + a_{COR}$ excepto para Coriolis. A tener en cuenta:

$a_{COR} = 0$ cuando $\begin{cases} w_{ARR} \text{ no hay o } w_{ARR} = 0 \\ V_P' \text{ no hay o } V_{P}' = 0 \\ w_{ARR} \parallel V_P' \end{cases}$

$w = cte \to \alpha = 0 \to a_t = 0$
$v = cte \to a = 0$

Movimiento Circular Uniforme ($\alpha = 0$)
$V_P = wR\vec{t}$
$a_P = w^2 R\vec{n}$

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado ($\alpha = cte$)
$V_P = wR\vec{t}$
$a_P = w^2 R\vec{n} + \alpha R\vec{t}$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

- **CIN.01.** - Un punto se mueve de forma que su velocidad y su aceleración son vectores no nulos. Se pide:

  1) Estudiar que tipo de movimiento se producirá si el producto escalar de la velocidad y la aceleración es nulo.

  2) Estudiar que tipo de movimiento se producirá si el producto vectorial de la velocidad y la aceleración es nulo.

  3) Particularizar los resultados anteriores para el caso de que el módulo de la aceleración sea constante.

(Febrero-1998)

- **CIN.02.** - El movimiento plano de un móvil cumple que el producto escalar de la velocidad por la aceleración es k veces el módulo de la velocidad. Además la aceleración normal tiene módulo constante no nulo. Discútase para que valores de k el movimiento es circular.

(Junio-1996)

- **CIN.03.** - Se tiene un movimiento curvilíneo que verifica que $|\vec{v}|$=constante:

1.- ¿Es constante el módulo de la aceleración del móvil?, ¿y su dirección?.

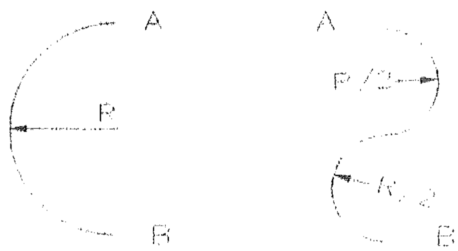
2.- ¿Puede ser nulo en algún instante $\vec{v}\cdot\vec{a}$?.

3.- ¿Verifica dicho movimiento que $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$?.

4.- ¿Puede ser el movimiento propuesto un movimiento circular con $|\vec{a}|$ variable?.

(Febrero-2006)

- **CIN.04.** - Un punto móvil recorre en primer lugar la trayectoria "**1**" semicircular de radio R y después la trayectoria "**2**" formada por dos semicircunferencias de radio R/2. En ambos casos lo hace con aceleración tangencial constante de valor $a_t = k$, igual en ambos casos y partiendo del reposo en el punto inicial A.

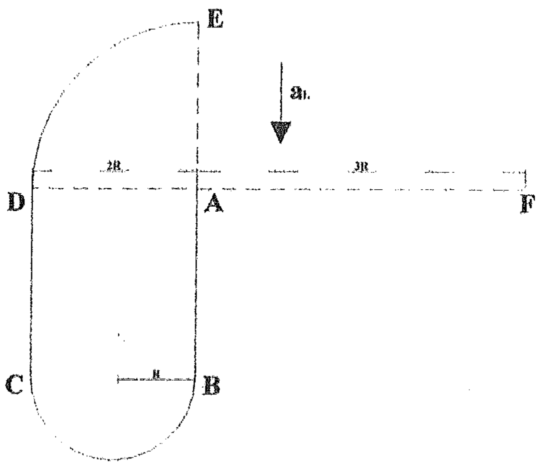


Estúdiese en qué caso es mayor la tangente del ángulo que forma la aceleración total en el punto B con la horizontal.

(Septiembre-2000)

- **CIN.05.** - Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba sometida a la aceleración de la gravedad "**g**" y una aceleración que se opone al movimiento, constante y de valor "**g/2**". Tras alcanzar una cierta altura, la partícula comienza el descenso estando sometida a la gravedad y a la misma aceleración de "**g/2**" que se opone también ahora al movimiento, alcanzando el punto de partida. Razonar si la partícula tarda más en el ascenso o en el descenso. *(Septiembre-2004)*

- **CIN.06.** - Un punto móvil sale de A y recorre la pista horizontal ABCDE. El tramo BC es semicircular de radio R y el DE es un cuarto de circunferencia de radio 2R. Todo este recorrido lo hace con una velocidad de módulo constante. En E queda libre, pero sometido a una aceleración a_L, en la dirección y sentido dibujados. Se sabe que el punto pasa posteriormente por F. Si se conocen sólo los valores de a_L y R, ¿ puede calcularse el módulo de la máxima aceleración del móvil en la pista AE?.

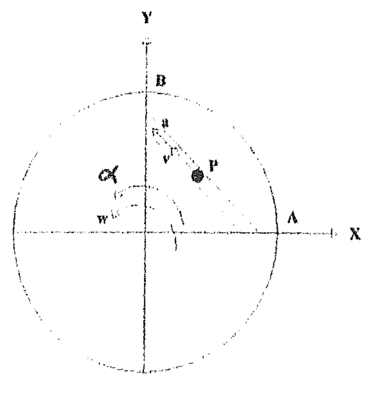


(Septiembre-2005)

- **CIN.07.** - Una partícula P se mueve por el segmento AB del disco de radio R de la figura el cual gira alrededor del eje OZ.En el instante en que P se encuentra en el punto medio M del segmento AB, se sabe que tiene una velocidad respecto al disco de "**v**" y una aceleración "**a**" también respecto al disco y ambas en sentido AB. En dicho instante la velocidad angular del disco vale $\omega\bar{k}$ y su aceleración angular es $\alpha\bar{k}$. Se pide:

  1) Velocidad respecto de ejes fijos de P en el citado instante.
  2) Aceleración absoluta de P en dicho instante.

Las magnitudes vectoriales se expresarán en ejes móviles. OP=R/2



(Junio-2002)

ACADEMIA CASTIÑEIRA

castineira

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

- **CIN.08.** - Un disco horizontal de radio R gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$. Sobre el disco va montada una barra vertical rígidamente unida a él y sobre ella asciende una partícula P con velocidad $\vec{v'}$ y aceleración $\vec{a'}$, ambas con sentido ascendente. Se desea conocer la velocidad y aceleración absolutas de P en el instante considerado

(Septiembre-2001)

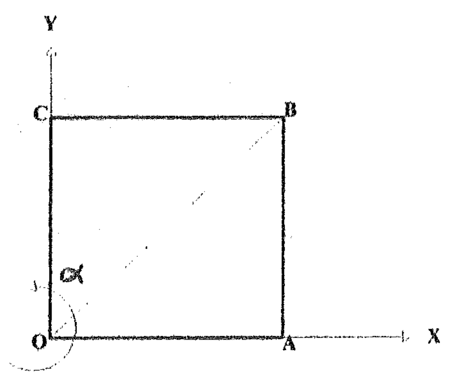
- **CIN.09.** - Un disco de radio R gira sobre un eje perpendicular a él y pasando por su centro con una velocidad angular ω_1 constante. Sobre su superficie se desplaza una partícula describiendo un movimiento circular uniforme del mismo sentido y de velocidad angular ω_2 respecto al disco, de radio r y con centro también en el eje indicado. Determinar razonadamente la dirección y sentido de la aceleración de la partícula para un observador situado en el exterior. *(Junio-2000)*

- **CIN.10.** - Un cilindro hueco de altura H y radio R se halla girando respecto de su eje con una velocidad angular $\vec{w} = cte$. Sobre la superficie interna del cilindro se desplaza una partícula con una velocidad relativa $\vec{v'}$ de módulo constante. Razonar si para algún tipo de trayectoria de la partícula pueden coincidir la variación de la velocidad de la partícula respecto del tiempo para un observador exterior y para un observador interno que gire con el cilindro.

(Febrero-2003)

- **CIN.11.** - La figura representa la posición inicial de un cuadrado de lado $L = \sqrt{3}$ m, que empieza a girar desde el reposo con aceleración $\alpha = \frac{\pi}{2}\,rad/s^2$ en su plano y alrededor de O. Al mismo tiempo que el cuadrado comienza a girar, una partícula empieza a desplazarse sin velocidad inicial desde O en dirección a B con aceleración $a = \frac{2}{3}\,m/s^2$.

Se pide calcular tras transcurrir un tiempo de $t = \sqrt{3}s$:



1.- Posición de la partícula.
2.- Velocidad de la partícula para un observador exterior.
3.- Aceleración de la partícula para un observador exterior.

(Febrero-2009)

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

- **CIN.12.** - Respecto de cierto sistema de referencia S, fijo en tierra, se tiene un cono que gira con velocidad angular $\overrightarrow{\omega_0}$ =cte, en torno a su eje. Partiendo del vértice, se mueve un punto P por una de las generatrices del cono con velocidad de módulo constante v_0, respecto del cono. En la posición en la que el punto móvil ha recorrido la mitad de la generatriz, se pide calcular el valor de los siguientes productos escalares:

  a) $\overrightarrow{\omega_0} \cdot \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad del punto P respecto al sistema S.

  b) $\overrightarrow{\omega_0} \cdot \vec{a}$, donde $\vec{a}$ es la aceleración del punto P respecto al sistema S.

  Los resultados deben expresarse en función de : ω_0, v_0, la altura "**h**" del cono y la longitud "**l**" de su generatriz. ***(Septiembre-2005)***

- **CIN.13.** - Un disco de radio R se mueve de forma que su centro desliza por el eje OZ de un sistema de referencia OXYZ de forma que $z=\frac{1}{2}R\,\omega^2\,t^2$; $\theta=\frac{1}{2}\,\omega^2\,t^2$, siendo θ el ángulo que un radio del disco forma con una paralela a OX que pasa por el centro del disco. Un punto P se mueve por el diámetro asociado al radio antes considerado siguiendo la ley $r=R\,\mathrm{sen}\,\omega t$, siendo "r" la distancia del punto al centro del disco. Se pide:

  1) Para un instante genérico, velocidad y aceleración de P respecto al disco.

  2) Para un instante genérico, velocidad y aceleración de P respecto de los ejes fijos.

PROBLEMAS CINEMÁTICA

• CIN 01

Un punto se mueve de forma que su velocidad y su aceleración son vectores no nulos. Se pide:

(1) Estudiar que tipo de movimiento se produciría si el producto escalar de la velocidad y la aceleración es nulo

(2) Estudiar que tipo de movimiento se produciría si el producto vectorial de la velocidad y la aceleración es nulo

(3) Particularizar los resultados anteriores para el caso en el que el módulo de la aceleración sea constante.

(1) $\bar{v}\cdot\bar{a}=0 \quad \bar{v}\neq 0 \quad \bar{a}\neq 0$

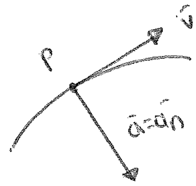
1º Forma

$\bar{v}\perp\bar{a} \rightarrow$ producto escalar de dos vectores no nulos $=0 \rightarrow$ vectores perpendiculares

2º Forma

$v\cdot a\cdot\cos\alpha=0 \rightarrow \begin{matrix}\bar{v}\neq 0\\ \bar{a}\neq 0\end{matrix} \rightarrow \cos\alpha=0 \rightarrow \alpha=90^\circ=\pi/2$ Si $\bar{v}\perp\bar{a} \rightarrow \bar{a}=\bar{a}_n$ y $a_t=0$

$a_t=0$; $a_T=\frac{dv}{dt}\cdot\bar{T}=0 \rightarrow v=cte$



Movimiento Uniforme No Rectilíneo, porque hay aceleración normal, y curvilíneo con $\bar{v}=cte$ y $\bar{a}=\bar{a}_n$

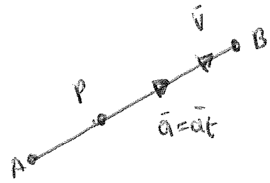
(2) $\bar{v}\times\bar{a}=0 \quad \bar{v}\neq 0 \quad \bar{a}\neq 0$

1º Forma

$\bar{v}\times\bar{a}=0 \rightarrow \bar{v}\parallel\bar{a}$

2º Forma

$v\cdot a\cdot\operatorname{sen}\alpha=0 \rightarrow \begin{matrix}\bar{v}\neq 0\\ \bar{a}\neq 0\end{matrix} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha=0 \rightarrow \alpha=0^\circ$ Si $\bar{v}\parallel\bar{a} \rightarrow \bar{a}=\bar{a}_t$ y $\bar{a}_n=0$



Movimiento Rectilíneo Acelerado, porque hay aceleración

(3) $|\bar{a}|=cte$

a) $\bar{a}=\bar{a}_n=cte=v^2/R$ $\begin{matrix}\rightarrow cte\ (a_t=dv/dt=0 \rightarrow v=cte)\\ \rightarrow cte\ (\text{radio de curvatura})\end{matrix}$ $\rightarrow$ Movimiento Uniforme Circular

b) Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado, porque hay aceleración cte

• CZN 02

El movimiento plano de un móvil cumple que el producto escalar de la velocidad por la aceleración es K veces el módulo de la velocidad. Además la aceleración normal tiene módulo constante no nulo. Discútase para que valores de K el movimiento es circular.

Movimiento Plano $\vec{v} \cdot \vec{a} = K|\vec{v}|$ $\quad a_n = V^2/R = cte$ (Valor de K para movimiento circular constante R=cte)

$V \cdot a \cdot \cos\alpha = KV \rightarrow a\cos\alpha = K \qquad a_n = cte = V^2/R \begin{matrix} \rightarrow cte \\ \rightarrow cte \end{matrix} \qquad a_t = dv/dt = 0 \rightarrow a\cos\alpha = a_t = 0 \rightarrow K=0$

• CZN 03

Se tiene un movimiento curvilíneo que verifica que $|\vec{v}|$=constante:

(1) ¿Es constante el módulo de la aceleración del móvil?, ¿Y su dirección?

(2) ¿Puede ser nulo en algún instante $\vec{v} \cdot \vec{a}$?

(3) ¿Verifica dicho movimiento que $\frac{|d\vec{v}|}{|dt|} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$?

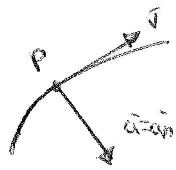
(4) ¿Puede ser el movimiento propuesto un movimiento circular con $|\vec{a}|$ variable?

Movimiento Curvilíneo $|\vec{v}|$=cte $\rightarrow$ $\boldsymbol{a_t} = dv/dt = 0$

(1) $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \rightarrow$ Si $\vec{a}_t = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \longleftrightarrow \vec{a}_n = V^2/R = cte \rightarrow$ Porque $\vec{a}$=cte tiene que ser R=cte

El sistema de referencia depende de la dirección, para el sistema de coordenadas de Frenet tienen las mismas direcciones pero en el sistema de coordenadas cartesiano tiene diferente dirección

(2) $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow v \perp a \qquad V \cdot a \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90° = \pi/2$



Si la $a_t = 0$, si puede ser nulo en algún instante $\vec{v} \cdot \vec{a}$

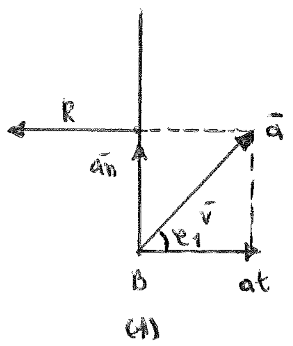
(3) $\frac{|d\vec{v}|}{|dt|} = \vec{a} \qquad \frac{d|\vec{v}|}{dt} = a_t$ no se cumple porque $\vec{a} = \vec{a}_n$ y $a_t = 0$

(4) $|\vec{a}| \neq cte \qquad \vec{a} = \vec{a}_n = V^2/R \neq cte$ Movimiento Circular $\vec{a}_n = V^2/R \neq cte$ $\begin{matrix} \rightarrow cte \\ \rightarrow \text{Tiene que ser variable} \end{matrix}$ R=variable

Puede ser un movimiento circular con $|\vec{a}|$ variable si R=variable

• C2N 04

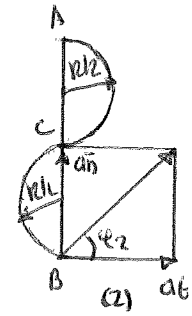
Un punto móvil recorre en primer lugar la trayectoria "P" semicircular de radio R y después la trayectoria "L" formada por dos semicircunferencias de radio R/2. En ambos casos lo hace con aceleración tangencial constante de valor $a_t = K$, igual en ambos casos y partiendo del reposo en el punto inicial A. Estúdiese en qué caso es mayor la tangente del ángulo que forma la aceleración total en el punto B con la horizontal.



$a_t = K = cte$

$tg\alpha = a_n/a_t = a_n/K$

Hallar la a_n?



$a_{n1} = V_1^2/\rho_1$; $a_{t1} = dv/dt = \int_{V_0=0}^{v} dv = \int_{t_0=0}^{t} K\,dt \to v = Kt$; $v = ds/dt \to \int_{S_0=0}^{S} ds = \int_{t_0=0}^{t} K t\,dt \to S = 1/2\,Kt^2$

Igualamos el tiempo al recorrido $\left\{ \begin{array}{l} t^2 = v^2/K^2 \\ t^2 = 2S/K \end{array} \right. \to v^2/K^2 = 2S/K \to v^2 = 2SK \to v = \sqrt{2S_{AB}K} \left\{ \begin{array}{l} S_{1AB} = R\pi \\ S_{2AB} = R/2\,\pi + R/2\,\pi = R\pi \end{array} \right.$

$V_1 = V_2 = \sqrt{2R\pi K}$

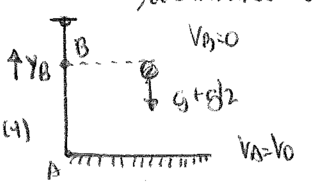
(1) $a_{n1} = \frac{(V_{B1})^2}{R} = \frac{2R\pi K}{R} = 2\pi K \to tg\alpha_1 = a_{n1}/a_t = 2\pi K/K = 2\pi$

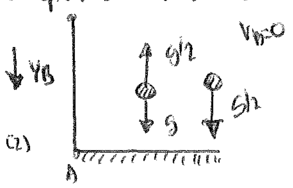
(2) $a_{n2} = \frac{(V_{B2})^2}{R/2} = \frac{2R\pi K}{R/2} = 4\pi K \to tg\alpha_2 = a_{n2}/a_t = 4\pi K/K = 4\pi$

$tg\alpha_1 < tg\alpha_2 \to 2\pi < 4\pi \quad 1<2$

• C4N05

Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba sometida a la aceleración de la gravedad "g" y una aceleración que se opone al movimiento, constante de valor "g/2". Tras alcanzar una cierta altura, la partícula empieza el descenso estando sometida a la gravedad y a la misma aceleración de "g/2" que se opone también ahora al movimiento, alcanzando el punto de partida. Razonar si la partícula tarda más en el ascenso o en el descenso.





$V_F = V_I - a t$

$Y_F = Y_I + V_I \cdot t - 1/2\,a t^2$

(1) $V_B = V_A - a \cdot t_A \to 0 = V_0 - 3/2\,g \cdot t_A \to t_A = 2/3\, V_0/g$

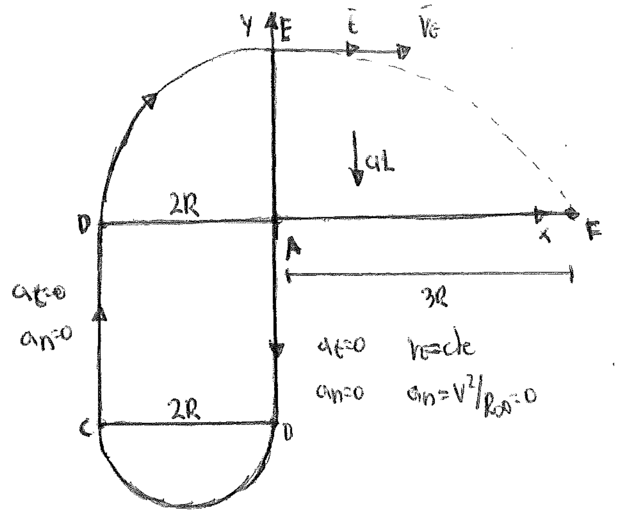
$Y_B = Y_A + V_A \cdot t_A - 1/2\,a t_A^2 \to Y_B = 0 + V_A t_A - 1/2\; 3/2\,g\, t_A^2 \to Y_B = V_0^2/3g$

(2) $Y_B = \underset{0}{Y_A} + \underset{0}{V_B}\,t_B + 1/2\,g/2\,t_B^2 \to Y_B = 1/2\,g/2\,t_B^2 \to V_0^2/3g = g/4\,t_B^2 \to t_B^2 = 2/\sqrt{3} \cdot V_0/g$

$t_A = 2/3\,V_0/g \quad t_B = 2/\sqrt{3} \cdot V_0/g \quad t_B > t_A$

• CZN 06

Un punto móvil sale de A y recorre la pista horizontal ABCDE. El tramo BC es semicircular de radio R y el DE es un cuarto de circunferencia de radio 2R. Todo este recorrido lo hace con una velocidad de módulo constante. En E queda libre, pero sometido a una aceleración a_L, en la dirección y sentido dibujados. Se sabe que el punto pasa posteriormente por F. Si se conocen sólo los valores de a_L y R. ¿Puede calcularse el módulo de la máxima aceleración del móvil en la pista AE?



$a=a_L=g=cte$

$v=cte \to a_t=dv/dt=0$

$a_n=V^2/R\ (v=cte)=a_{n_{MAX}} \to R_{MINIMA}$

$a_x=dv_x/dt \to V_x=cte \to V_x=V=dx/dt \to \int_{x_0}^{x}dx=\int_{t=0}^{t}v\,dt \to x=\cancel{x_0}+vt \to v\cdot t=x$

$a_y=dv_y/dt \to \int_{v_0}^{v}dv_y=-\int_0^t g\,dt \to v_y=\cancel{v_0}-gt=dy/dt \to \int_{y_0}^{y}dy=\int_0^t a_L t\,dt \to$

$y=y_0-1/2\,at^2$

$v\cdot t=x \to v\cdot t=3R \to t=3R/V\ s$

$y=y_0-1/2\,at^2 \to 0=2R-1/2\,a_L t^2 \to 0=2R-1/2\,a_L(3R/V)^2 \to 2R=1/2\,a_L\cdot\frac{9R^2}{V^2}$

$V^2=9/4\cdot R\cdot a_L \to V=3/2\sqrt{R\cdot a_L} \to a_n=9/4\,R\cdot A_L$

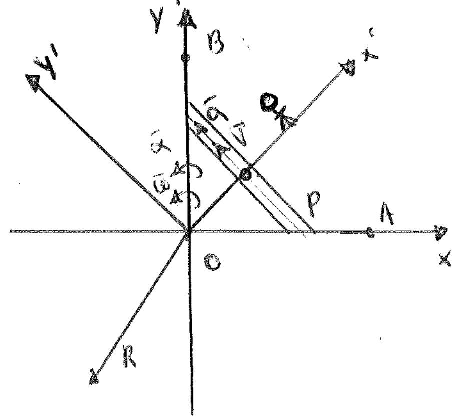
$a_{n_{MAXIMA}}$ es en BC donde el radio (R) es mínimo

• CZN 07

Una partícula P se mueve por el segmento AB del disco de radio R de la figura el cual gira alrededor del eje OZ. En el instante en que P se encuentra en el punto medio M del segmento AB, se sabe que tiene una velocidad respecto al disco "v" y una aceleración "a" también respecto al disco y ambas en sentido AB. En dicho instante la velocidad angular del disco vale "$\omega\bar{k}$" y su aceleración angular es $\alpha\bar{k}$. $OP=R/2$. Se pide:

(1) Velocidad respecto de ejes fijos de P en el citado instante

(2) Aceleración absoluta de P en dicho instante



$\bar{v}=?\bar{i}$ $\begin{cases} \bar{\omega}=\omega\bar{k} \\ \bar{\alpha}=\alpha\bar{k} \\ OP=R/2 \end{cases}$

(1) $\bar{V}_P=\bar{V}_P'+\bar{V}_{arr}=(v+\omega R/2)\bar{j}'$

$-\bar{V}_P'=v\bar{j}'$

$-V_{arr}=\omega R/2\,\bar{j}'$

(2) $\bar{a}_P=\bar{a}_P'+\bar{a}_{arr}+\bar{a}_{cor}=a\bar{j}'+\alpha R/2\,\bar{j}'-\omega^2R/2\,\bar{i}'-2\omega v\bar{i}'=(a+\alpha R/2)\bar{j}'+(-\omega^2R/2-2\omega v)\bar{i}'$

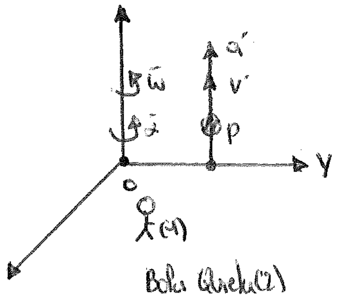
$-\bar{a}_P'=a\bar{j}'$

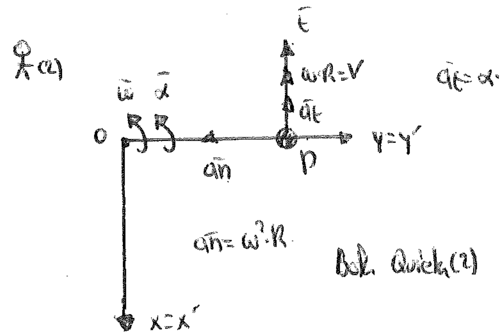
$-\bar{a}_{arr}=\alpha R/2\,\bar{j}'-\omega^2R/2\,\bar{i}'$

$-\bar{a}_{cor}=2\bar{\omega}_{arr}\wedge\bar{V}_P'=2\begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix}=-2\omega v\bar{i}'$

• C2N 08

Un disco horizontal de radio R gira con velocidad angular $\bar{\omega}$ y aceleración angular $\bar{\alpha}$. Sobre el disco va montada una barra vertical rígidamente unida a él y sobre ella asciende una partícula P con velocidad $\bar{v}$ y aceleración $\bar{a}$, ambas con sentido ascendente. Se desea conocer la velocidad y aceleración absolutas de P en el instante considerado.





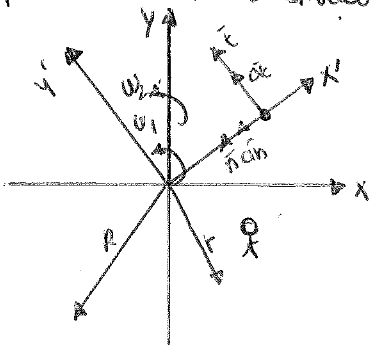
V = ω·R
a = at + an = α·R + ω²R

- $\bar{V}_P = \bar{V}_P' + \bar{V}_{ARR} = [v'\bar{k}] + [-\omega R\bar{i}]$
  - $\bar{V}_P' = v'\bar{k}$
  - $\bar{V}_{ARR} = -\omega R\bar{i}$

- $\bar{a} = \bar{a}_P' + \bar{a}_{ARR} + \bar{a}_{COR} = [a'\bar{k}] - [\omega^2 R\bar{i}] - [\alpha R\bar{i}]$
  - $\bar{a}_P' = a'k$
  - $\bar{a}_{ARR} = [-\omega^2 R\bar{j}] + [-\alpha R\bar{i}]$
  - $\bar{a}_{COR} = 2\bar{\omega}_{ARR}\wedge\bar{V}_P' = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix} = 0 \quad \bar{\omega}_{ARR} // \bar{V}_P'$

• C2N 09

Un disco de radio R gira sobre un eje perpendicular a él y pasando por su centro con una velocidad angular ω_1 constante. Sobre su superficie se desplaza una partícula describiendo un movimiento circular uniforme del mismo sentido y de velocidad angular ω_2 respecto al disco, de radio r y con centro también en el eje indicado. Determinar razonadamente la dirección y sentido de la aceleración de la partícula para un observador situado en el exterior.



$\omega_1 = cte\ (\omega_{ARR}) \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad a_{t1} = 0$

$\omega_2 = cte \rightarrow \alpha_2 = 0 \quad a_{t2} = 0$

- $\bar{V}_P = \bar{V}_P' + \bar{V}_{ARR} = (\omega_2 r\bar{j}') + (\omega_1 r\bar{j}') = r(\omega_1 \omega_2 \bar{j}')$
  - $\bar{V}_P' = \omega_2 r\bar{j}'$
  - $\bar{V}_{ARR} = \omega_1 r\bar{j}'$

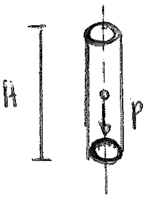
$\bar{a} = \bar{a}_P' + \bar{a}_{ARR} + \bar{a}_{COR} = -(\omega_2^2 r\bar{i}') - (\omega_1^2 \cdot r\bar{i}') - (2(\omega_1\omega_2 r\bar{i}')$

- $\bar{a}_P' = -(\omega_2^2 r\bar{i}')$
- $\bar{a}_{ARR} = -(\omega_1^2 r\bar{i}')$
- $\bar{a}_{COR} = 2\bar{\omega}_{ARR}\wedge\bar{V}_P' = 2\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 r & 0 \end{vmatrix} = -2(\omega_1\omega_2 r\bar{i}')$

• C2N 10

Un cilindro hueco de altura H y radio R se halla girando respecto de su eje con una velocidad angular ω=cte. Sobre la superficie interna del cilindro se desplaza una partícula con una velocidad relativa $\bar{v}$ de módulo constante. Razona si algún tipo de trayectoria de la partícula pueden conocerla la variación de la velocidad de la partícula respecto del tiempo para un observador exterior y para un observador interno que gire con el cilindro.

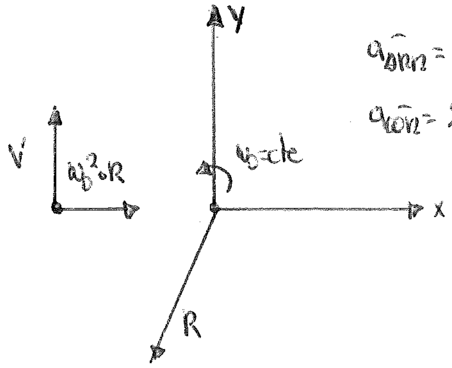
$[d\bar{v}/dt]_S = \bar{a} \longleftrightarrow [d\bar{v}/dt]_{S'} = \bar{a}'$ ¿$\bar{a}=\bar{a}'$?



ω_1=cte $\rightarrow a_1=0$

V_p'=cte $\rightarrow a_p'=0$

$\bar{a} = a_p' + a_{\bar{a}rr} + a_{\bar{c}or}$



$a_{\bar{a}rr} = \omega^2 \cdot R$

$a_{\bar{c}or} = 2\omega_{\bar{a}rr} \wedge V_p' = 2\omega.$

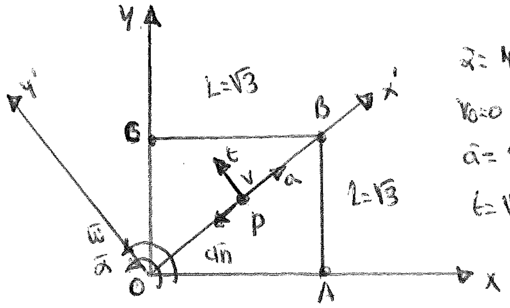
I: $a_{\bar{a}rr}=0$ $\quad a_{\bar{c}or}=0 \rightarrow$ No puede ser porque hay $V_{\bar{a}rr}$

II: $a_{\bar{a}rr} = -a_{\bar{c}or} \rightarrow \omega^2 \cdot R = 2\omega v' \rightarrow V = \frac{\omega^2 \cdot R}{2\omega} = \omega R/2$

• C2N 11

La figura representa la posición inicial de un cuadrado de lado $L=\sqrt{3}$ m, que empieza a girar desde el reposo con aceleración $\alpha = 1/2$ rad/s^2 en un plano y alrededor de O. Al mismo tiempo que el cuadrado comienza a girar, una partícula empieza a desplazarse sin velocidad inicial desde O en dirección a B con aceleración $a = 2/3$ m/s^2. El tiempo es $t = \sqrt{3}$ s

(1) Posición de la partícula
(2) Velocidad de la partícula para un observador exterior
(3) Aceleración de la partícula para un observador exterior



$\bar{\alpha} = 1/2$ rad/s^2

$V_0=0$

$\bar{a} = 2/3$ m/s^2

$t = \sqrt{3}$ s

(1) $\omega_f = \cancel{\omega_0} + \alpha t = 2{,}719$ rad/s

$V_f = \cancel{V_0} + at = a \cdot t = 1{,}154$ m/s $\quad S = \cancel{S_0} + \cancel{V_0}t + 1/2 a t^2 = 1$ m posición de la partícula

(2) $V_p = V_p' + V_{\bar{a}rr} = [1{,}154\, \bar{i}'] + [2{,}719]\bar{j}'$ m/s

$- V_p' = [1{,}154\, \bar{i}']$

$- V_{\bar{a}rr} = [2{,}719 \times 1]\bar{j}'$

$a_{\bar{c}or} = 2\omega_{\bar{a}rr} \wedge V_p' = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ V_p' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega V_p \bar{j}'$

(3) $\bar{a} = a_p' + a_{\bar{a}rr} + a_{\bar{c}or} = [2/3\, \bar{i}'] + [1/2]\bar{j}' - [\omega^2 S]\bar{i}' + [2\omega v]\bar{j}' = -6{,}726\,\bar{i}' + 7{,}815\,\bar{j}'$

$- a_p' = [2/3\, \bar{i}']$

$- a_{\bar{a}rr} = [1/2 \cdot 1]\bar{j}' - [\omega^2 \cdot S]\bar{i}' = [1/2]\bar{j}' - [7{,}39]\bar{i}'$

$- a_{\bar{c}or} = 2\omega_{\bar{a}rr} \wedge V_p' = 2\omega V_p' = [6{,}275]\bar{j}'$

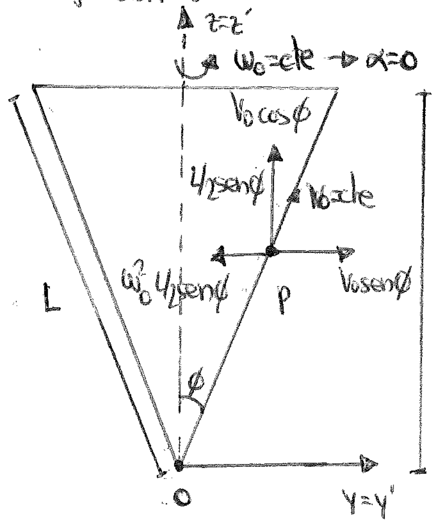
CZN 12

Respecto de cierto sistema de referencia S, fijo en tierra, se tiene un cono que gira con velocidad angular ω_0 = cte, en torno a su eje. Partiendo del vértice, se mueve un punto P por una de las generatrices del cono con velocidad de módulo constante v_0, respecto del cono. En la posición en la que el punto móvil ha recorrido la mitad de la generatriz, se pide calcular el valor de los siguientes productos escalares:

a) $\bar{\omega}_0 \cdot \bar{v}$, donde $\bar{v}$ es la velocidad del punto P respecto del sistema S

b) $\bar{\omega}_0 \cdot \bar{a}$, donde $\bar{a}$ es la aceleración del punto P respecto al sistema S

Los resultados deben expresarse en función de: ω_0, v_0, la altura "H" del cono y la longitud "L" de su generatriz



$\cos\phi = H/L$

$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi}$

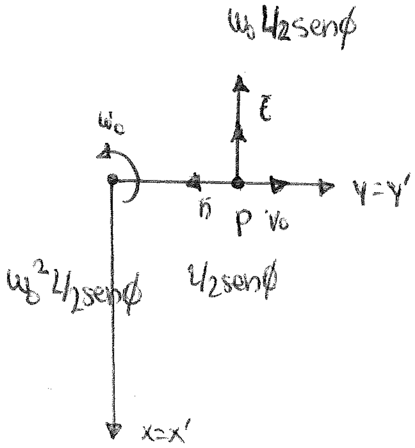
$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{1-H^2/L^2}$

$\bar{\omega}_0 = \omega \bar{k} = \bar{\omega}_{arr}$

V_0=cte

a=0

$\bar{V}_0 = \bar{V}_p'$



a) $\bar{V}_p = \bar{V}_p' + \bar{V}_{arr} = [V_0 \cdot (\operatorname{sen}\phi \bar{j} + \cos\phi \bar{k})] + [-\omega_0 \cdot L/2 \operatorname{sen}\phi \bar{i}]$

- $\bar{V}_p' = V_0 (\operatorname{sen}\phi)\bar{j} + V_0 (\cos\phi)\bar{k} = V_0 [\operatorname{sen}\phi \bar{j} + \cos\phi \bar{k}]$
- $\bar{V}_{arr} = [-\omega_0 L/2 \operatorname{sen}\phi \bar{i}]$

$\bar{\omega}_0 \cdot \bar{V}_p' = \omega_0 \cdot V_0 \cos\phi = \omega_0 \cdot V_0 H/L = \bar{\omega}_0 \cdot \bar{v}$

b) $\bar{a}_p = \cancel{\bar{a}_p'} + \bar{a}_{arr} + \bar{a}_{cor} = [-\omega_0^2 L/2 \operatorname{sen}\phi \bar{j}] + [-2\omega_0 \cdot V_0 \operatorname{sen}\phi \bar{i}]$

- $\bar{a}_p' = 0$ (V_0=cte)
- $\bar{a}_{arr} = [-\omega_0^2 L/2 \operatorname{sen}\phi \bar{j}]$
- $\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega}_{arr} \wedge \bar{V}_p' = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & V\operatorname{sen}\phi & V\cos\phi \end{vmatrix} = [-2\omega_0 \cdot V_0 \operatorname{sen}\phi \bar{i}]$

$\bar{\omega}_0 \cdot \bar{a}_p = 0$ ($\bar{a}_p' = 0 \rightarrow \bar{V}_p'$=cte)

• CEN 13

Un disco de radio R se mueve de forma que su centro desliza por el eje OZ de un sistema de referencia OXYZ de forma que $z = 1/2\, R\omega^2 t^2$; $\theta = 1/2\, \omega^2 t^2$, siendo θ el ángulo que un radio del disco forma con una paralela a OX que pasa por el centro del disco. Un punto P se mueve por el diámetro asociado al radio antes considerado siguiendo la ley $r = R \operatorname{sen} \omega t$, siendo "r" la distancia del punto al centro del disco.

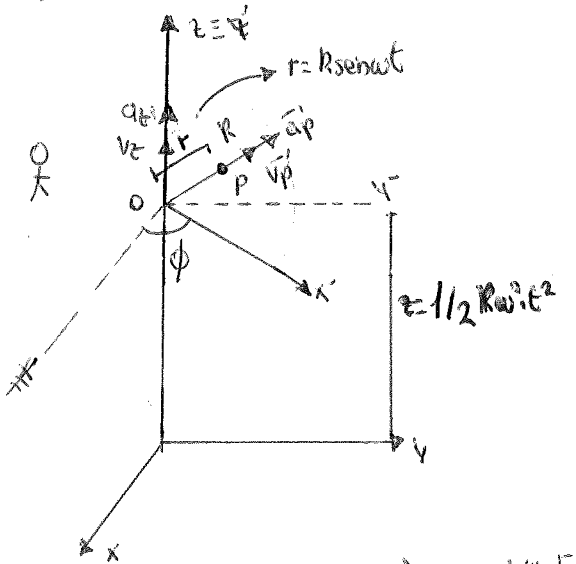
(a) Para un instante genérico, velocidad y aceleración de P respecto del disco

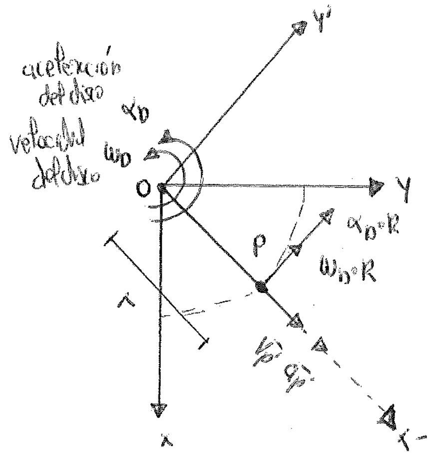
(b) Para un instante genérico, velocidad y aceleración de P respecto de los ejes fijos.

$z = 1/2\, R \cdot \omega^2 \cdot t^2$

$\phi = 1/2\, \omega^2 \cdot t^2$

$r = R \cdot \operatorname{sen} \omega t$





$z = 1/2\, R\omega^2 \cdot t^2 \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_z = dz/dt\, \bar{k}' = R \cdot \omega^2 \cdot t \cdot \bar{k}' \\ \bar{a}_z = dv_z/dt = R\omega^2 \cdot \bar{k}' \end{array} \right.$ $\quad \phi = 1/2\, \omega^2 \cdot t^2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_D = d\phi/dt\, \bar{k}' = \omega^2 \cdot t\, \bar{k}' \\ \alpha_D = d\omega_D/dt\, \bar{k} = \omega^2 \cdot \bar{k} \end{array} \right.$

derivada de r $\quad r = R \operatorname{sen} \omega t \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_p' = d\bar{r}/dt = R\omega \cos \omega t \cdot \bar{i}' \\ \bar{a}_p' = \dfrac{d\bar{v}'}{dt} = -R\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \bar{i}' \end{array} \right.$

$\bar{v}_p = \bar{v}_p' + \bar{v}_{arr} = [R\omega \cos \omega t\, \bar{i}'] + [R\omega^2 t\, \bar{k}' + \omega_D \cdot r\, \bar{j}']$

$= [R\omega \cos \omega t\, \bar{i}] + [R\omega^2 t\, \bar{k}' + \omega^2 t\, R \operatorname{sen} \omega t\, \bar{j}']$

$\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega}_{arr} \wedge \bar{v}_p' = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_D \\ R\omega\cos\omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\, \omega_D \cdot R\omega \cos \omega t\, \bar{j}$ $\qquad \bar{a}_p = \bar{a}_p' + \bar{a}_{arr} + \bar{a}_{cor}$

$\bar{a}_p = [-R \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen} \omega t\, \bar{i}'] + [R \cdot \omega^2\, \bar{k} + \alpha_D \cdot r \cdot \bar{j}' - \omega_D^2 \cdot r\, \bar{i}'] + [2\, \omega_D \cdot R \cdot \omega \cdot \cos \omega t\, \bar{j}']$

$= [-R \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen} \omega t\, \bar{i}'] + [R\omega^2\, \bar{k} + \omega^2 R \operatorname{sen} \omega t\, \bar{j} - \omega^2 t\, R \operatorname{sen} \omega t\, \bar{i}'] + 2 R\omega^3 t \cos \omega t\, \bar{j}']$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

DINÁMICA

1. – SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIAL Y NO INERCIAL.
2. – LEYES DE NEWTON.
3. – TIPOS DE FUERZAS.
   - Tipos de enlaces.
   - Rozamiento.
4. – TRABAJO Y POTENCIA.
   - Fuerzas conservativas.
   - Casos típicos de fuerzas conservativas.
5. – ENERGÍA CINÉTICA.
6. – ECUACIÓN DE LA ENERGÍA.
7. – CHOQUES.
8. – DINÁMICA RELATIVA.

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

1. SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIAL Y NO INERCIAL

Se dice que un sistema de referencia es inercial cuando está en *reposo absoluto* o en *traslación rectilínea uniforme.*

2. LEYES DE NEWTON

Primera: En ausencia de fuerzas, una partícula de masa m permanece en reposo si inicialmente lo estaba o en movimiento rectilíneo uniforme si inicialmente tenía velocidad.

Segunda: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$; $\vec{a}$ respecto de una referencia inercial. $\vec{F}$ fuerzas reales como peso, normal, rozamientos....

Tercera: acción y reacción: las fuerzas de contacto entre dos cuerpos son iguales y contrarias en el uno y el otro.

3. TIPOS DE FUERZAS

a) Primarias (o directamente aplicadas): fuerzas que actúan independientemente de las ligaduras (peso, la fuerza de un muelle, ...)
b) Secundarias (o fuerzas de ligadura): las fuerzas de ligadura aparecen para imponer restricciones geométricas al movimiento (por ejemplo: "contacto liso" $\rightarrow \mu = 0$).

Tipos de enlaces o ligaduras, normal y rozamiento:

- Tipos de enlace:

UNILATERAL: La partícula puede abandonar la curva; esto sucederá cuando sea $N = 0$.
BILATERAL: La partícula no puede abandonar la curva. Se admiten los dos sentidos de la normal para mantener la ligadura.

Independientemente de que el enlace sea unilateral o bilateral, podemos tener rozamiento o no:

- Rozamiento:

Se define μ = coeficiente de rozamiento $\mu \in [0, \infty]$. Es característico de cada superficie.
Si nos dicen que tenemos "contacto liso" $\rightarrow \mu = 0$.
Si nos dicen que tenemos "contacto rugoso" $\rightarrow \mu \neq 0$. Dentro de tener rozamiento, hay dos tipos:

- ESTÁTICA: la partícula no se mueve respecto de la superficie en que apoya. $|\vec{F_R}| \leq \mu |\vec{N}|$ ($|\overrightarrow{F_{R,máx}}| = \mu|\vec{N}|$). Sentido del rozamiento: el necesario para garantizar el equilibrio.
- DINÁMICA: la partícula se mueve sobre la superficie en que apoya. $|\vec{F_R}| = \mu$ N. Sentido del rozamiento contrario al deslizamiento.

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

4. TRABAJO Y POTENCIA

Trabajo elemental de $\vec{F}$ sobre la partícula: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (JULIOS)

Trabajo de $\vec{F}$ sobre la partícula del punto A al punto B: $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

- $W_{A\to B} > 0 \rightarrow$ motor.
- $W_{A\to B} < 0 \rightarrow$ resistente
- $W_{A\to B} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\vec{F} = 0 \\ -\vec{v} = 0 \ \forall t \rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{cte} \rightarrow d\vec{r} = 0 \\ -\vec{F} \perp d\vec{r} \Leftrightarrow \vec{F} \perp \vec{v} \ \ (\equiv \vec{F} \perp \text{trayectoria}) \end{cases}$

Potencia es la cantidad de trabajo por unidad de tiempo: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (potencia instantánea) (WATIOS)

Fuerzas conservativas.

Una fuerza $\vec{F} = F_x(x, y, z)\,\vec{i} + F_y(x, y, z)\,\vec{j} + F_z(x, y, z)\,\vec{k}$ es conservativa cuando rot $\vec{F} = \vec{0}$, siendo

$$\text{rot}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Si $\vec{F}$ es conservativa, la podemos expresar como: $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$. A U se le llama energía potencial y es una magnitud escalar.

LAS FUERZAS DE LIGADURA JAMÁS SON CONSERVATIVAS($\vec{N}$, $\vec{T}$, $\overrightarrow{F_R}$)
UNA FUERZA QUE DEPENDA EXPLÍCITAMENTE DEL TIEMPO JAMÁS ES CONSERVATIVA.

Propiedad de las fuerzas conservativas:

El trabajo de una fuerza conservativa es independiente del camino : $W_{A\to B} = U_A - U_B$

Demostración:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U$$

$$\Rightarrow dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU \rightarrow W = -\int_A^B dU = -(U_B - U_A) =$$

$$= U_A - U_B$$

CASOS TÍPICOS DE FUERZAS CONSERVATIVAS:

1. $\vec{F} = F(x)\,\vec{i}$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F(x)\,\vec{i}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = F(x)\,dx = -dU \rightarrow dU = -F(x)\,dx \rightarrow U = -\int F(x)\,dx$$

Ejemplo: $\vec{F} = 3x^2\,\vec{i} \rightarrow U = -\int 3x^2\,dx = -x^3$

2. PESO $\rightarrow \vec{F} = -mg\,\vec{k}$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -mg\,\vec{k}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = -mg\,dz = -dU \rightarrow dU = mg\,dz \rightarrow U = \int mg\,dz = mgz$$

$\rightarrow \begin{cases} z<0 \rightarrow U<0 \\ z>0 \rightarrow U>0 \end{cases}$ el nivel se escoge de forma arbitraria:

$z>0$ ↑

$z = 0$ ....(Nivel)

$z<0$ ↓

3. FUERZA DE UN MUELLE $\rightarrow$ Datos del muelle: (k, l_o) k = cte del muelle y l_o = longitud natural del muelle

|-/\/\/\/\/\/\/\----------→---------→ x $d\vec{x} = dx\vec{i} = d\vec{r}$

dx

/-------------/

l_o

$$\vec{F} = -k(x - l_o)\,\vec{i} \rightarrow U = -\int \vec{F}\,d\vec{x} = -\int -k(x - l_o)\,dx = -\left(k\,l_o x - \frac{1}{2}k x^2\right) = \frac{1}{2}k x^2 - k\,l_o x + \frac{1}{2}k\,l_o =$$

$$= \frac{1}{2}k\,[x - l_o]^2$$

Resumiendo: $\vec{F} = -k(x - l_o)\,\vec{i}$; $U = \frac{1}{2}k\,[x - l_o]^2$.

Observaciones:

- *muelle comprimido*:

$\vec{F} = k(l_0 - x)\vec{i}$

|-/\/\/\/\/\/\/\/\⇒ ---> x

/-----------/
x
/-----------------/
l_0

En ambos casos, la tendencia es recuperar la longitud natural del muelle

- *muelle estirado*:

$\vec{F} = k(x - l_0)\vec{i}$

|-/\/\/\/\/\/\/\/ /\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\⇒ ---------------------------> x

/---------------------------------/
x
/-----------------/
l_0

5. ENERGÍA CINÉTICA

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

6. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Tengo la partícula sometida a N fuerzas de cualquier tipo: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{j} \overline{F_i}}_{\text{CONSERV.}} + \underbrace{\sum_{I=J+1}^{n} \overline{f_I}}_{\text{NO CONSERV.}}$.

La segunda ley de Newton dice: $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Multiplico esta ecuación escalarmente por $d\vec{r}$:

$$\underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\,\vec{v}\,d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d\,E_c$$

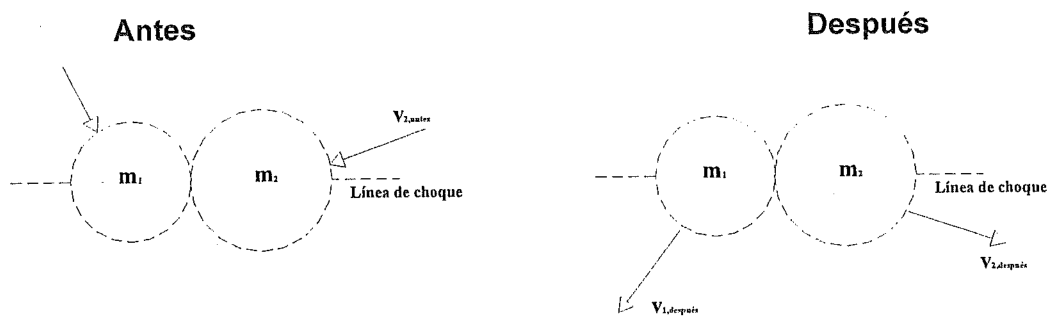
$$\boxed{dW = d\,E_c}$$

$$dW = dW_{F.N.C} + dW_{F.C} = dW_{F.N.C} - dU = d\,E_c$$
$$dW_{F.N.C} = d\,E_c + dU = d\,(E_c + U) = d\,(E_{MECANICA})$$

$$\boxed{W_{F.N.C} = \Delta E_{MECANICA} = E_{MEC.B} - E_{MEC:A}}$$

Vemos aquí que si el trabajo de las fuerzas NO CONSERVATIVAS es nulo (recordar cuándo el trabajo de una fuerza es nulo), se conserva la energía mecánica (≡ la energía mecánica es constante) y el problema es conservativo.

7. CHOQUES



Si analizamos el sistema de las dos partículas que sólo están sometidas al choque:

$\sum \vec{P} = (\Delta\ m\vec{v})_{SIST.} \rightarrow \vec{0} = (\Delta\ m\vec{v})_{SIST.} \rightarrow$

$$\boxed{m_1 \cdot \overrightarrow{v_{1,antes}} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_{2,antes}} = m_1 \cdot \overrightarrow{v_{1,después}} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_{2,después}}}$$

Ecuación fundamental del choque. ¡ HAY QUE CONSIDERAR SIGNOS AL SER MAGNITUDES VECTORIALES !

TIPOS DE CHOQUE:

perfectamente elástico → se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento del sistema →:

- $\Delta E_{cin} = 0 \rightarrow E_{c\ sist_{ANTES}} = E_{c\ sist_{DESPUES}} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 (v_{1,antes})^2 + \ldots\ldots\ldots$
- $\Delta(m\vec{v}) = 0 \rightarrow m_1 \cdot \overrightarrow{v_{1,antes}} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_{2,antes}} = m_1 \cdot \overrightarrow{v_{1,después}} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_{2,después}}$

plástico → no se conserva la energía cinética

- $\Delta E_{cin} \neq 0 \rightarrow \Delta E_{cin} = cte$
- $m_1 \cdot \overrightarrow{v_{1,antes}} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_{2,antes}} = (m_1 + m_2) \cdot \overrightarrow{v_{después}}$ ó CONDICIÓN

8. DINÁMICA RELATIVA.

Sean: O_1XYZ INERCIAL y $OX'Y'Z'$ NO INERCIAL

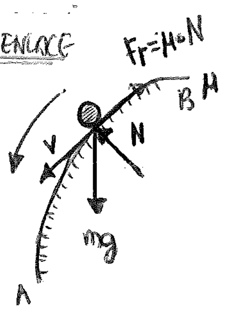
P/O_1XYZ : $\overrightarrow{F_{Reales}} = m \cdot \overrightarrow{a_p} = m\ [\overrightarrow{a_p'} + \overrightarrow{a_{p,arrastre}} + 2\ (\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_p'})\ ]$

$P/OX'Y'Z'$: $\vec{F} = \overrightarrow{F_{Reales}} + \overrightarrow{F_{IA}} + \overrightarrow{F_{IC}} = m \cdot \overrightarrow{a_p'}$ siendo :

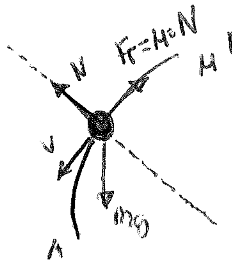
$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{IA}} = -m \cdot \overrightarrow{a_{p,arrastre}} = -m\,[\,\overrightarrow{a_O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) + (\vec{\alpha} \times \overrightarrow{OP})\ ] = (-m \cdot \overrightarrow{a_O}) + \underbrace{(-m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}))}_{F.CENTRIFUGA} + (-m \cdot \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OP}) \\ \overrightarrow{F_{IC}} = -2m \cdot \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_P'} \end{cases}$$

TEMA 2: DINÁMICA

- **TIPOS DE ENLACE**



UNILATERAL



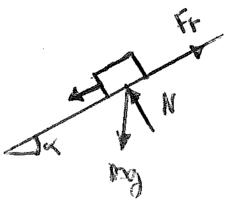
BILATERAL

N puede ser nula

N nunca puede ser nula

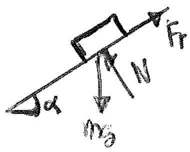
- **ROZAMIENTO**

$a=0$



DINÁMICA $F_r=\mu\cdot N$

Fr en sentido opuesto



ESTÁTICA $F_r \leq \mu\cdot N$

Fr en cualquier sentido

- **TRABAJO Y POTENCIA**

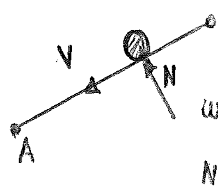
- Trabajo $\quad W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$

$\hookrightarrow v=dr/dt \rightarrow d\vec{r}=\vec{v}dt$

MOTOR: $W>0$

RESISTENTE: $W<0$ $(W_{res}<0)$

$W=0 \begin{cases} \vec{F}=0 \\ \vec{v}=0 \\ \vec{F}\perp v \end{cases}$



$W_N=\int \vec{N}d\vec{r}=\int \vec{N}\vec{v}dt$

$N\perp v \quad \cos\pi/2=0$

$W_N=0$

- FUERZAS CONSERVATIVAS

$\vec{F}$ es conservativa si es irrotacional

↳ $\vec{rot}\,\vec{F}=0$ derivan de su potencial $\vec{F}=-\vec{grad}\,U$ (un gradiente convierte un escalar en un vector)

$$\vec{grad}\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

- $W=\int \vec{F}\,d\vec{r}=-\int \underbrace{\vec{grad}\,U\,d\vec{r}}_{dU}=-\Delta U$ $\quad W_{F\,CONSERVATIVA}=-\Delta U$

Ejemplo:

$\vec{F}=3x^2\vec{i}+3z\vec{k}$ $\quad -\vec{Rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=0$

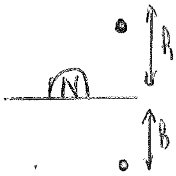
$F_x \downarrow 3x^2 \quad F_y \downarrow 0 \quad F_z \downarrow 3z$

Ejemplo:

$U=3xy^2+2z \rightarrow \vec{grad}\,U=3y^2\vec{i}+6xy\vec{j}+2\vec{k}$

- $\vec{F}\,/\,\vec{rot}\,F=0 \rightarrow U=-\int F\,d\vec{r}$

- Peso $\vec{F}=-mg\vec{k} \rightarrow U=mgh$

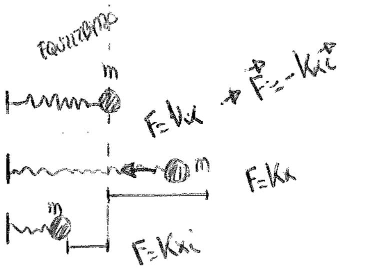


$U=mgh>0$

$U=-mgh<0$

- MUELLE $\vec{F}=Kx\vec{i}$

↳ $U=1/2\,Kx^2$



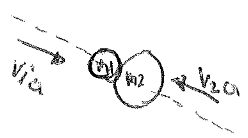
FUERZAS CONSERVATIVAS
- → PESO
- → MUELLE
- → $\vec{Rot}\,\vec{F}=0$

FUERZAS NO CONSERVATIVAS
- → TENSIÓN HILO
- → FR
- → Normal
- → F depende del tiempo

- CHOQUES

ANTES

DESPUÉS



- ELÁSTICO

Se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética

$\Delta(m\vec{v})=0 \rightarrow m\cdot\vec{v}=cte$ (vectorial)

$(m\vec{v})^a=(m\vec{v})^d \quad m_1\cdot\vec{v}_1{}^a+m_2\cdot\vec{v}_2{}^a=m_1\cdot\vec{v}_1{}^d+m_2\cdot\vec{v}_2{}^d$

$\Delta E_{cin}=0 \rightarrow E_{cin}=cte$ (No vectorial, porque van al cuadrado)

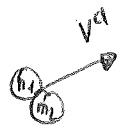
$1/2\,m_1(v_1{}^a)^2+1/2\,m_2(v_2{}^a)^2=1/2\,m_1(v_1{}^d)^2+1/2\,m_2(v_2{}^d)^2$

- PLÁSTICO

$\Delta(m\vec{v})=0 \rightarrow mv=cte$

$m_1\vec{v}_1{}^a+m_2\vec{v}_2{}^a=(m_1+m_2)\,v^d$

$\Delta E_{cin}=cte+$ condición



m_1+m_2

(Mismo cuerpo)

• TEOREMA DE LA ENERGÍA

$\to E_{CIN} = 1/2\, m v^2$

$$W_{TOTAL} = W_{\substack{\text{fuerzas}\\ \text{conservativas}}} + W_{\substack{\text{fuerzas no}\\ \text{conservativas}}} = \Delta E_{CIN}$$

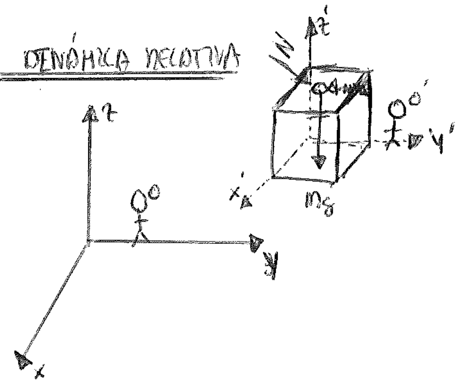
$$W_{TOTAL} = [\underbrace{W_F}_{-\Delta U_F} + \underbrace{W_P}_{-\Delta U_P} + \underbrace{W_M}_{-\Delta U_M}] + [W_{tensión} + W_N + W_{FR} + W_{F(t)}] = \Delta E_{CIN}$$

$$W_{TOTAL} = W_{FNC}(\Delta E_{CIN}) + W_{FC}(\overbrace{\Delta U_F + \Delta U_M + \Delta U_P}^{\Delta U}) \to \Delta E_{mecánica}$$

$$W_{FNC} = \Delta E_{mecánica} \to W_{FNC} = 0 \to \Delta E_{mecánica} = 0$$

$\to E_{mecánica} = cte$

• DINÁMICA RELATIVA



Observador Fijo

$\sum \vec F = m\vec a$ $\quad F_{REALES} = (mg, N, F_M)$ $\quad m\vec a = m(\vec{a}_p' + \vec a_{arr} + \vec a_{cor})$

Observador Móvil

$F_{REALES} = (mg, N, F_M)$ $\quad F_{INERCIALES}$ $\quad \vec F_{REALES} + \vec F_{ZA} + \vec F_{FC} = m \cdot \vec{a}_p'$

En dinámica relativa solo se representan como fuerza la a_p' (aceleración relativa), el resto de fuerzas se representan como fuerzas inerciales multiplicándolas por la masa.

ACADEMIA CASTIÑEIRA

castiñeira

SANTIAGO RUSIÑOL, 4

91 533 82 01 - 91 534 16 64

28040 MADRID

MINAS

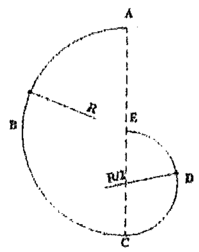
***Asignatura:* FÍSICA-I**

***Profesor:* Borja Nájera**

- **DIN.01** - Una partícula de masa "m" desliza sobre una circunferencia de radio R, desde A hasta B. Está sometida a su peso y a otra fuerza horizontal de módulo constante $F=\frac{mg}{2}$ dirigida hacia la izquierda. Existe rozamiento variable y desconocido. Se sabe que el módulo de la velocidad de la partícula, es el mismo en A y B. Se pide explicar cómo puede calcularse el valor del trabajo de la fuerza de rozamiento.

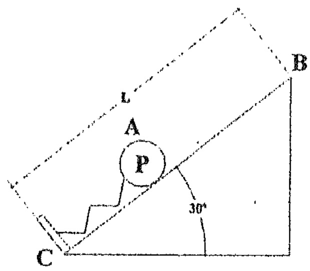
(Diciembre-2006)

- **DIN.02**. - La sección recta vertical de una superficie cilíndrica fija, está constituida por una parte semicircular ABC de radio R y otra también semicircular CDE de radio R/2. Desde el punto más alto A se lanza una partícula de masa "m" con velocidad v_0. En ABC no hay rozamiento mientras que en CDE el módulo de la fuerza de rozamiento es constante de valor K. Se pide el máximo valor de K para que la partícula alcance E sin despegarse antes de la superficie cilíndrica.



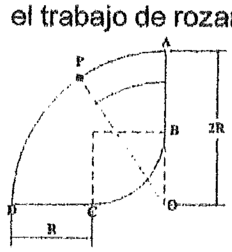
(Septiembre-1999)

- **DIN.03**. - Una partícula P de masa 10kg, es lanzada por un resorte de rigidez $k=10^4\ ^N\!/\!_m$ desde su posición más comprimida (10cm desde su posición de equilibrio). Esta posición está situada en la mitad del plano inclinado 30º de la figura, de coeficiente de rozamiento $\mu=0{,}2$ y longitud total L=2m. Determine la velocidad de la partícula en el momento de llegar al suelo.



- **DIN.04**. - En la figura se representan dos guías. La primera, ABCD, con dos partes rectilíneas de igual longitud R, la vertical AB y la horizontal DC, y una circular BC de radio R. La segunda la guía circular AD de radio 2R y centro O. Ambas guías son fijas y están situadas en un plano vertical. En las partes AB y DC, el coeficiente de rozamiento es el mismo e igual a μ, conocido. En la parte circular BC se desconoce el coeficiente de rozamiento. En la segunda guía AD, el módulo de la fuerza de rozamiento en cada punto P es $F=K\varphi$, donde k es una constante conocida y φ el ángulo de posición indicado en la figura. Una pequeña bola de masa m puede moverse por ambas guías insertada en ellas. Si se deja caer, sin velocidad inicial, desde el punto A por la primera guía, llega al punto D con una velocidad v. Si se lanza desde el punto A con velocidad inicial v_0 por la segunda guía, llega al punto D con velocidad 2v.

Se pide hallar, en función de μ, K y v_0 el trabajo de rozamiento en la parte circular BC de la primera guía.



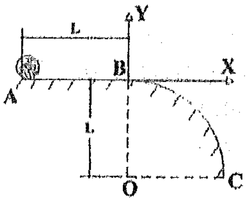
(Septiembre-2002)

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

- **DIN.05**. - Una masa puntual de m=9kg recorre la pista lisa ABC de la figura, partiendo en A del reposo. (Al alcanzar el punto C sigue un movimiento rectilíneo vertical). En el tramo rectilíneo AB de longitud L=3m, la partícula está sometida a una fuerza igual a $\vec{F_1} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$. El tramo BC es un cuarto de circunferencia de radio OB=AB=L y en él la masa está sometida a una fuerza $\vec{F_2} = -kx\vec{i}$, donde k es una constante positiva no nula y x es la distancia al eje vertical de la figura. Determinar el valor de k para que el móvil, sin desprenderse de la pista, alcance el punto C.

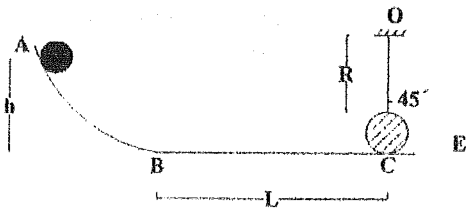


(Diciembre-2002)

- **DIN.06**. - Una masa m_1=10,27g desliza por una pista AB curvilínea sin rozamiento. Después se traslada horizontalmente sobre un suelo rugoso de coeficiente de rozamiento μ =0,3. Finalmente impacta en C con la masa m_2=20,54g de un péndulo que cuelga mediante un hilo del punto O, quedando adheridas ambas masas.

  1.- Valor mínimo de h para que el péndulo formado por ambas masas tras el choque complete una vuelta en torno a O.
  2.- En las condiciones del apartado anterior, calcular la tensión del hilo la primera vez que forma 45º con la vertical (E).

  Se considera L=27cm; R=12cm y $g = 9{,}8\,m/s^2$

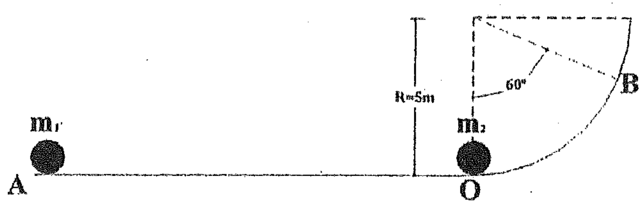


(Febrero-2004)

- **DIN.07**. - Una partícula de masa m_1=2 Kg parte de A con velocidad inicial $v_0 = 20\,m/s$ y desliza sin rozamiento sobre el tramo AO de longitud L. Al llegar m_1 a O, impacta con la partícula de masa $m_2 = \frac{1}{2}m_1$, quedando ambas adheridas y recorriendo el tramo OB. Durante el recorrido OB actúa, además, una fuerza horizontal $\vec{F} = kx\vec{i}$ donde x es la coordenada primera en el sistema cartesiano XYZ de la figura. Calcular:

  1.- Velocidad del conjunto de las partículas tras la colisión.
  2.- Valor de k para que en el punto B la velocidad del conjunto sea v_0.
  3.- Trabajo de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de OB, con el k calculado anteriormente.

(Febrero-2005)



ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

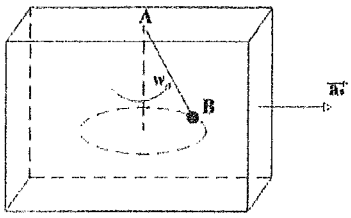
MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

==

- **DIN.08**. - Un vagón se traslada con aceleración $\overline{a_0}$ constante. En el punto A del techo, un mecanismo hace girar la varilla inclinada AB, con velocidad angular $\omega = \text{cte}$ en torno al eje vertical que pasa por A. En el otro extremo B existe una pequeña masa m, de forma que ésta describe trayectorias circulares de radio R, respecto al vagón.

  a) Dibújense y valórense las fuerzas de inercia que ve, actuando sobre m, un observador situado en reposo respecto al vagón (O_1, X'_1, Y'_1, Z'_1).

  b) Repetir lo mismo, pero esta vez para un observador que además gira acompañando a la masa m, es decir, tal que ve la masa m en reposo con unos ejes (O_2, X'_2, Y'_2, Z'_2) que giran en torno al eje vertical.



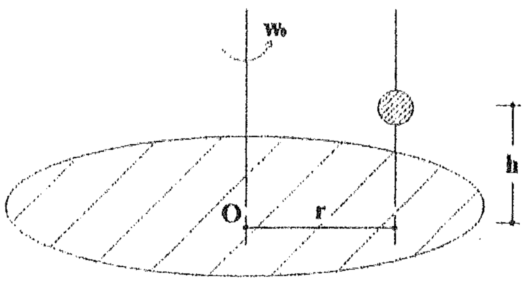
(Junio-2002)

- **DIN09**. - Una habitación cilíndrica gira alrededor de su eje con velocidad angular $\overline{\omega}$ constante .Una masa puntual de peso P está en reposo respecto de la habitación apoyada en la pared y a media altura de ésta, gracias a que entre la masa y la pared existe un rozamiento de valor μ.Dibújese el diagrama de fuerzas que actúa sobre la masa para un observador situado en la habitación. Con las condiciones descritas explíquese si la velocidad angular puede tener cualquier valor, o por el contrario hay valores incompatibles con el equilibrio de la masa.

(Febrero-1998)

- **DIN.10**. - Sobre un disco de madera horizontal se ha clavado un alambre vertical a una distancia r del centro O del disco. El disco gira en torno a su eje con una velocidad angular ω_0 constante. En estas condiciones se inserta en el alambre una bolita de madera de masa m, que puede deslizar a lo largo del alambre con un rozamiento de coeficiente μ. Inicialmente la bolita está en reposo respecto del alambre.

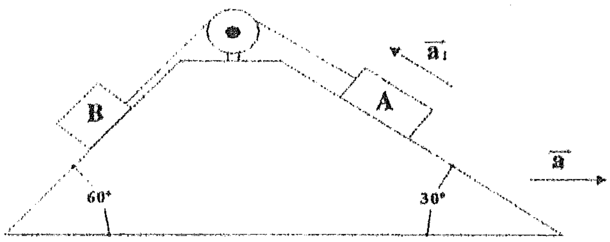
  1.- Dibujar el esquema de fuerzas sobre la bolita en dicho instante inicial para un observador ligado al disco.
  2.- Si la bola desciende debido a la acción de su peso, por el alambre, razonar en qué cambia el esquema de fuerzas para el observador unido al disco.
  3.- En el caso anterior, cuál sería el valor de la aceleración relativa de la bola respecto del disco. ¿Depende esta aceleración de la masa de la bola?.



(Febrero-2004)

DIN.11. - La doble cuña C de la figura se mueve sobre un plano horizontal con rozamiento despreciable y una aceleración constante $\vec{a}$. Sobre el plano inclinado de la derecha, un bloque A de 3/2 kg se mueve ascendiendo por el plano con una aceleración $\vec{a}_1$ respecto al mismo. Por el plano inclinado de la izquierda desciende otro bloque B de masa 1 kg, siendo nula la reacción normal del plano sobre el. Los bloques A y B están unidos por un hilo ideal a través de una polea P de masa y rozamientos despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre los bloques A y B y los planos inclinados es μ=1/3, se pide hallar los valores de $\vec{a}$ y $\vec{a}_1$.

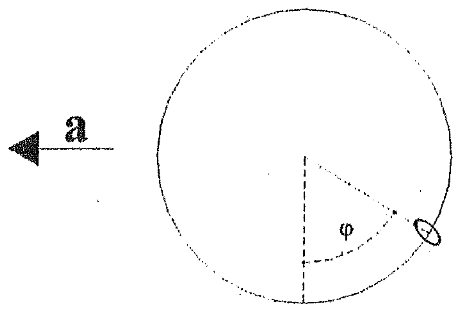
(Septiembre-2003)



DIN.12. - Un alambre en forma de circunferencia de radio R=1m y dispuesto en el plano vertical, contiene una anilla de masa m=10gr insertada en su interior e inicialmente situada en reposo en su parte inferior. A continuación se comienza a mover el alambre con una aceleración constante de $15\,{}^{m}/_{s^2}$ de dirección horizontal y en el plano del alambre. Al cabo de un cierto tiempo, al ascender la anilla por el alambre, esta alcanza su equilibrio dinámico. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre la anilla y el alambre es $\mu = 0.2$:

1.- Posición (ángulo φ) en la que está situada la anilla cuando se alcanza dicho equilibrio dinámico.
2.- Reacción ejercida por el alambre sobre la anilla.

(Septiembre-2006)



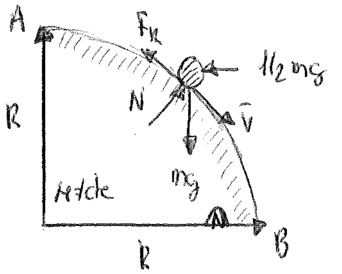
DIN.13. - Una varilla homogénea de longitud **L** y peso **P**, se halla inicialmente en el plano vertical colgada del techo por su extremo A mediante un hilo y sujeta a una pared mediante una articulación en O que la permite girar. En cierto instante se corta el hilo y la varilla comienza a girar alrededor de O. Simultáneamente una partícula comienza a desplazarse sobre la varilla con velocidad v_1 = cte respecto a ella, partiendo de A en dirección a O.
Se pide realizar un esquema de fuerzas que actúan sobre la partícula para un observador situado en la varilla y moviéndose con ella.

(Septiembre-2007)

PROBLEMAS DINÁMICA

• DIN 01

Una partícula de masa "m" desliza sobre una circunferencia de radio R, desde A hasta B. Está sometida a su peso y a otra fuerza horizontal de módulo constante $F = mg/2$ dirigida hacia la izquierda. Existe rozamiento variable y desconocido. Se sabe que el módulo de la velocidad de la partícula, es el mismo en A y B. Se pide explicar como puede calcularse el valor del trabajo de la fuerza de rozamiento.



W_{FR}? $\vec F = -1/2\, mg\, \hat i$ $\quad \text{rot}\, \vec F = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -1/2\, mg & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ F. Conservativa

$V_B = V_A$ Hacemos el rotacional para saber si es una fuerza conservativa

$$U_F = -\int \vec F\, d\vec r = -\int (-1/2\, mg\, \hat i)\, dx\, \hat i = 1/2\, m \cdot g \cdot x$$

$$[W_{NORMAL} + W_{F.ROZAMIENTO}] + [W_{PESO} + W_F] = \Delta E_{CINÉTICA}$$

FUERZAS NO CONSERVATIVAS — FUERZAS CONSERVATIVAS

$W_N = 0$ $\quad \vec N \perp \vec v$ (Normal)

$W_p = -\Delta U_p$ (Energía Potencial) $\Delta U_p = m \cdot g \cdot h$

$W_F = -\Delta U_F$ (Fuerza)

$$W_{FR} = \Delta E_{CIN} + \Delta U_p + \Delta U_F = \Delta E_{MECÁNICA} = E_{MECÁNICA\,B} - E_{MECÁNICA\,A}$$

$$W_{FR} = [\cancel{1/2\, m V_B^2} + m \cdot g \cancel{h_B} + 1/2\, m g x_B] - [\cancel{1/2\, m V_A^2} + m g h_A + 1/2\, m g \cancel{x_A}]$$

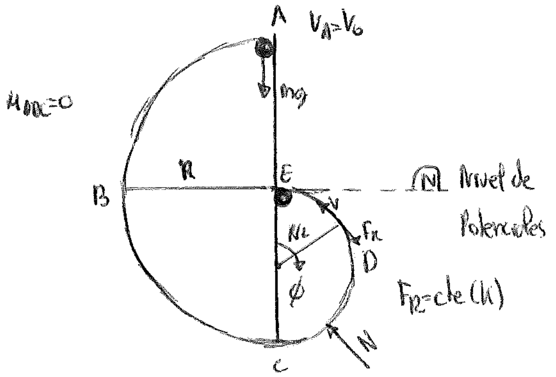
$V_A = V_B \quad 0 \quad x_B = R \quad V_A = V_B \quad h_A = R \quad 0$

$$W_{FR} = [1/2\, m \cdot g \cdot R] - [m g R] = -1/2\, m \cdot g \cdot R$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento siempre es negativo

• DZN 02

La sección recta vertical de una superficie cilíndrica fija, está situada por una parte semicircular ABC de radio R y otra también semicircular CDE de radio R/2. Desde el punto más alto A se lanza una partícula de masa m con velocidad v_0. En ABC no hay rozamiento mientras que en CDE el módulo de la fuerza de rozamiento es constante de valor K. Se pide el máximo valor de K para que la partícula alcance E sin despegarse antes de la superficie cilíndrica



$v = d\vec{r}/dt$ $\qquad$ $v = ds/dt$

$$W_{F_R\,EDC} = \int \vec{F_R}\cdot d\vec{r} = \int -F_R\cdot\vec{t} = -\int F_R\,\vec{t}\cdot v\,\vec{t}\,dt = -\int F_R\cdot v\cdot dt = -\int F_R\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dt$$

$$= -\int F_R\cdot ds = -\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} F_R\cdot R\cdot d\phi = -K\cdot R/2\cdot\pi$$

$s = R\cdot\phi \rightarrow ds = R\,d\phi$

$R = R/2$

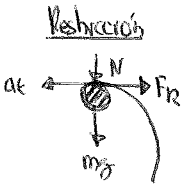
AE

$$(W_{F_R} + \underbrace{W_N}_{0\ \vec{N}\perp\vec{v}}) + \underbrace{W_{PESO}}_{-\Delta U_p} = \Delta E_{CIN} \rightarrow W_{F_R} = \Delta E_{CIN} + \Delta U_p = \Delta E_{MECÁNICA} = E_{MEC\,E} - E_{MEC\,A}$$

$$-K\cdot R/2\cdot\pi = [1/2\, m v_E^2 + m g \underbrace{h_E}_{0}] - [1/2\, m v_0^2 + m g R] \rightarrow -K\cdot R/2\cdot\pi = 1/2\, m v_E^2 - 1/2\, m v_0^2 - m g R$$

$$(1)\ v_E^2 = v_0^2 + 2 g R - \frac{K\cdot R\cdot\pi}{m}$$

Restricción



$a_n = v_E^2/(R/2)$

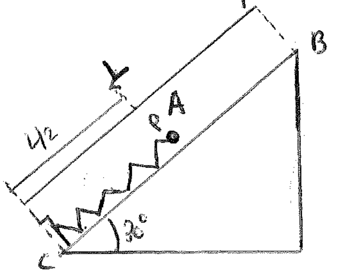
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad N + mg = m\, v_E^2/(R/2) \rightarrow N = m\left(\frac{2v_E^2}{R} - g\right) \qquad N \geq 0$$

$$2v_E^2/R \geq g \rightarrow 2v_E^2 \geq gR\ (1)$$

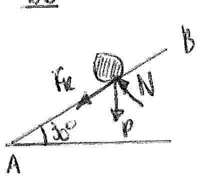
$$v_E^2 = v_0^2 + 2gR - \frac{K\cdot R\cdot\pi}{m} \rightarrow 2\left(v_0^2 + 2gR - \frac{K\cdot R\cdot\pi}{m}\right) \geq gR \rightarrow K \leq \frac{2mv_0^2 + 3mgR}{2\pi R} \rightarrow K_{máx} = \frac{2mv_0^2 + 3mgR}{2\pi R}$$

• DCM 03

Una partícula P de masa 10 kg, es lanzada por un resorte de rigidez $k = 10^4$ N/m desde su posición más comprimida (40 cm desde su posición de equilibrio). Esta posición está situada en la mitad del plano inclinado de 30° de la base, de coeficiente de rozamiento $\mu = 0,2$ y longitud total $L = 2m$. Determine la velocidad de la partícula en el momento de llegar al suelo



AB



$W_{FR} + \cancel{W_N} + (W_{PESO} + W_{MUELLE}) = \Delta E_{CIN}$

$0\ (\vec{N} \perp \vec{v})$ $\quad \to -\Delta U_M$

→ Sentido contrario al eje x

$W_{FR} = \Delta E_{MEC} = E_{MEC\,B} - E_{MEC\,A}$

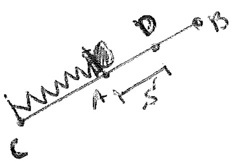
$W_{FR} = \int_A^B \vec{F_R} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B F_R \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = -\int_A^B F_R \cdot dx = -\int_A^B \mu \cdot N \cdot dx = -\int_A^B \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \, dx$

$= -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot x \Big]_{A=0}^{B=L/2} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot L/2$

$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot L/2 = \left[1/2\, m v_B^2 + m g \underbrace{L/2 \cdot \text{sen}30°}_{\text{cota de B}} \right] - \left[1/2\, m \underbrace{\cancel{v_A^2}}_{0} + m \cdot g \cdot \underbrace{\cancel{h_A}}_{0} + 1/2\, k \cdot \underbrace{x^2}_{(0,4)^2} \right]$

$V_B < 0$!! La partícula no llega a B

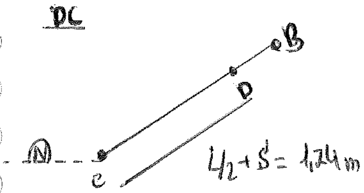
AD



$W_{FR} = E_{MEC\,D} - E_{MEC\,A} \to -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot S' = \left[1/2\, m g \underbrace{\cancel{V_D^2}}_{0} + m \cdot g\, S' \,\text{sen}30° \right] - \left[1/2\, m \underbrace{\cancel{v_A^2}}_{0} + m g \underbrace{\cancel{h_A}}_{0} + 1/2\, k x^2 \right]$

$S' = 0,74$ m $< L/2 = 1$ m

DC

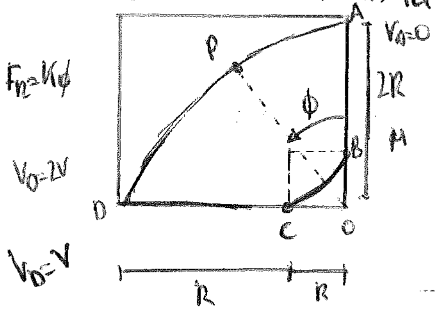


$W_{FR} = E_{MEC\,C} - E_{MEC\,D} \to -\mu m g \cos 30° (L/2 + S') = [1/2\, m g V_C^2 + m g \underbrace{\cancel{h_C}}_{0}] - [1/2\, m \underbrace{\cancel{v_D^2}}_{0} + m g (L/2 + S')\, \text{sen}30°]$

$V_C = 3,33$ m/s

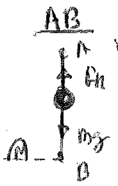
• DRN 04

En la figura se representan dos guías. La primera ABCD, con dos partes rectilíneas de igual longitud R, la vertical AB y la horizontal DC, y una circular BC de radio R. La segunda la guía circular AD de radio 2K y centro O. Ambas guías son fijas y están situadas en un plano vertical. En las partes AB y DC, μ el coeficiente de rozamiento. En la segunda guía AD el módulo de la fuerza de rozamiento en cada punto P es $F=K\phi$ donde K es una constante conocida y ϕ el ángulo de posición indicado en la figura. Una pequeña bola de masa m puede moverse por ambas guías insertada en ellas. Si se deja caer, sin velocidad inicial, desde el punto A por la primera guía, llega al punto D con velocidad 2V. Se pide hallar, en función de M, K y V_0 el trabajo de rozamiento en la circular BC de la primera guía.



La bola cae sin tocar la vía → $F_R=0$

AB



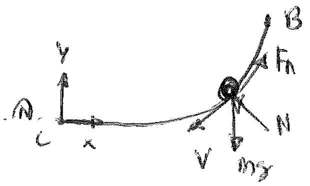
$V_A=0$

$\cancel{W_{FR}} = \Delta E_{CIN} \rightarrow 0 = \Delta E_{MEC}$ $\quad E_{MEC}=cte$

$-\Delta U_p$

$$E_{MEC\,A} = E_{MEC\,B} \rightarrow \left[\tfrac12 m \cancel{v_A^2} + mg\cdot R\right] = \left[\tfrac12 m v_B^2 + mg \cancel{h_B}\right] \rightarrow v_B^2 = 2g\cdot R$$

BC



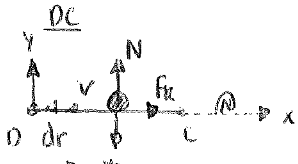
$(W_{FR} + \cancel{W_N}) + (W_P) = \Delta E_{CIN} \rightarrow W_{FR\,BC} = \Delta E_{MEC} = E_{MEC\,C} - E_{MEC\,B}$

0 $\quad$ $N \perp v$ $\quad$ $-\Delta U_p$

$$W_{FR\,BC} = \left[\tfrac12 m v_C^2 + mg\cancel{h_C}\right] - \left[\tfrac12 m v_B^2 + mg\cdot R\right] = \tfrac12 m v_C^2 - \tfrac12 m\, 2gR - mgR$$

$$W_{FR\,BC} = \tfrac12 m v_C^2 - 2mgR$$

DC



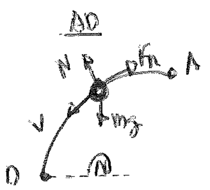
$(\cancel{W_N} + W_{FR}) + (\cancel{W_P}) = \Delta E_{CIN} \rightarrow W_{FR} = \Delta E_{CIN}$

0 $N \perp v$ $\quad$ $-\Delta U_p = 0$ Están al mismo nivel

$$W_{FR} = \int \vec{F_R}\cdot d\vec{r} = -\int F_R\cdot \vec{i}\,(-dx\vec{i}) = -\int_C^D F_R\, dx = -\int_{C=0}^{D=R} \mu m g\cdot dx = -\mu\cdot mg\cdot R \rightarrow -\mu mgR = \tfrac12 m V_D^2 - \tfrac12 m V_C^2$$

$$V_C^2 = V_D^2 + 2\mu gR \rightarrow W_{FR\,BC} = \tfrac12 m\,(V^2 + 2\mu gR) - 2mgR$$

AD



$(W_{FR} + \cancel{W_N}) + (W_P) = \Delta E_{CIN}$ $\qquad W_{FR} = -\int_0^{\pi/2} F_R\cdot 2R\cdot d\phi = -\int_0^{\pi/2} K\cdot\phi\cdot 2R\cdot d\phi = -K2R\left[\phi^2/2\right]_0^{\pi/2} = -K\cdot 2R\cdot \pi^2/8$

0 $N\perp v$ $\quad -\Delta U_p$

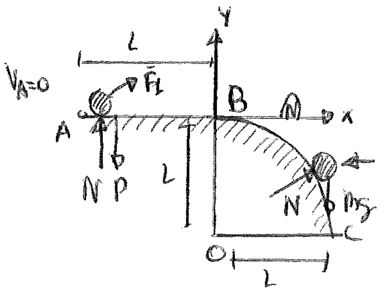
$W_{FR} = -K\cdot R\cdot \pi^2/4$ $\qquad W_{FR} = \Delta E_{MEC} = E_{MEC\,D} - E_{MEC\,A} \rightarrow -K\cdot R\pi^2/4 = \left[\tfrac12 m V_D^2 + mg\cancel{h_D}\right] - \left[\tfrac12 m V_A^2 + mg\,2R\right] \rightarrow$

$$-KR\pi^2/4 = \tfrac12 m\,(2V)^2 - \tfrac12 m V_0^2 - mg\,2R \rightarrow V^2 = \tfrac14 V_0^2 + g\cdot R - \frac{K\cdot R\cdot \pi^2}{8m}$$

$$W_{FR} = \tfrac12 m V_0^2 - \tfrac1{16} K\cdot R\cdot \pi^2 + mgR\,(\mu - 2/3)$$

• DZN 06

Una masa puntual de $m=9\,kg$ recorre la pista lisa ABC de la figura, partiendo en A del reposo. Al alcanzar el punto C sigue en movimiento rectilíneo vertical. En el tramo rectilíneo AB de longitud $L=3m$, la partícula está sometida a una fuerza igual $\vec F_1 = 6t\vec i + 2\vec j$. El tramo BC es un cuarto de circunferencia de radio $OB=OC=L$ y en él la masa está sometida a una fuerza $\vec F_2 = -kx\vec i$, donde k es una constante positiva no nula y x es la distancia al eje vertical de la figura. Determinar el valor de k para que el móvil, sin desprenderse de la pista, alcance el punto C.

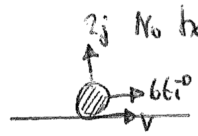


$\vec F_1 = 6t\vec i + 2\vec j$

$F_2 = -kx\vec i$

$P = mg$

A = nivel de potencial



AB

$$(W_N + W_{F1}) + (W_P) = \Delta E_{CIN} \to W_{F1} = \Delta E_{CIN} = (1/2\, m V_B^2 - 1/2\, m V_A^2) = 1/2\, m V_B^2 \to 81/2 = 1/2\, m V_B^2 \to V_B = 3\, m/s$$

0 NIV

$$W_{F1} = \int 6t\vec i \cdot \vec v\, dt = \int 6t\vec i \cdot v_x \vec i\, dt = \int_{t_A=0}^{t_B} 6 \cdot t \cdot v_x \cdot dt \qquad \vec F_x = m\vec a_x : \ i: 6t = m a_x \to a_x = 6/9\, t = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_{v_x=0}^{v_x} dv_x = \int_{t=0}^{t} 2/3\, t \cdot dt \to v_x = 2/3\, t^2/2 = t^2/3$$

↳ $d\vec r = dx\vec i$

$d\vec r = \vec v\, dt$

$v_x = dx/dt$ → integrando $x = t^3/9$

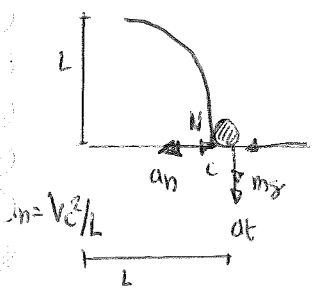
$$W_{F1} = \int_{t=0}^{t_B=3} 6t \cdot t^2/3 \cdot dt = \int_0^3 2t^3 = \left[t^4/2 \right]_0^3 = 81/2\ (J)$$

BC

$W_N + W_P + W_{F2} = \Delta E_{CIN}$ → $\text{rot}\, \vec F_2 = 0$ (conservativa) $U = -\int -kx\,dx = 1/2\, kx^2$ → $0 = \Delta E_{MEC}$

0 NIV

$$E_{MEC\,B} = E_{MEC\,C} \to 1/2\, m V_B^2 + mg h_B + 1/2\, k x_B^2 = 1/2\, m V_C^2 - mg L + 1/2\, k \cdot L^2 \to V_C^2 = 67{,}8 - K$$



$\Sigma \vec F = m\vec a$ $\quad K\cdot L - N = m \cdot V_C^2/L \to N = K\cdot L - m\, V_C^2/L \quad N \geq 0$

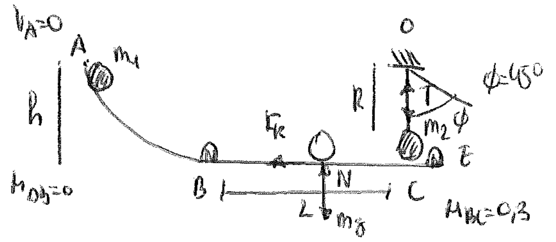
$k \cdot x_C = k \cdot L$ $\quad K\cdot L - \frac{67{,}8 - K}{L} \cdot m \geq 0 \to K \geq 34 \to K_{MIN} = 34$

D2N 06

Una masa $m_1 = 10,27\,g$ desliza por una pista AB curvilínea sin rozamiento. Después se traslada horizontalmente sobre un suelo rugoso de coeficiente de rozamiento $\mu = 0,3$. Finalmente impacta con C con la masa $m_2 = 20,54\,g$ de un péndulo que cuelga mediante un hilo del punto O, quedando adheridas ambas masas.

(1) Valor mínimo de h para que el péndulo formado por ambas masas tras el choque complete una vuelta en torno a O

(2) En las condiciones del apartado anterior, calcular la tensión del hilo la primera vez que forma 45º con la vertical (E) $L = 27\,cm$ $R = 12\,cm$ $g = 9,8\,m/s$



AB

$(\cancel{W_N} + \cancel{W_p}) = \Delta E_{CIN} \rightarrow 0 = \Delta E_{MEC} \quad E_{MEC\,A} = E_{MEC\,B}$

$0\ \vec N \perp \vec v \quad -\Delta U_p$

$\frac{1}{2} m_1 \cancel{V_A^2} + m_1 g h_A = \frac{1}{2} m_1 V_B^2 + m_1 g \cancel{h_B} \rightarrow V_B^2 = 2gh$

BC

$(\cancel{W_N} + W_{FR}) + (\cancel{W_p}) = \Delta E_{CIN}$

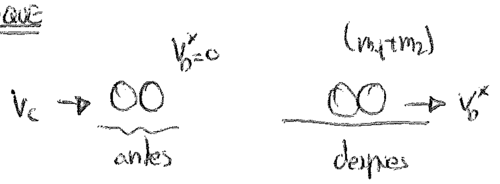
$0\ \vec N \perp \vec v \qquad 0$ Mismo nivel

$W_{FR} = \Delta E_{CIN} = E_{CIN\,C} - E_{CIN\,B} \qquad W_{FR} = \int \vec F_R \cdot d\vec r = -\int F_R \vec i\, dx \vec i = -\int_B^C F_R\, dx$

$= -\int \mu_{BC} m_1 g\, dx = -\mu_{BC} m_1 g \cdot L$

$-\mu_{BC} m_1 g L = \frac{1}{2} m_1 V_C^2 - \frac{1}{2} m_1 V_B^2 \rightarrow V_C^2 = V_B^2 - 2\mu_{BC} g L \rightarrow V_C^2 = 2gh - 2\mu_{BC} g L = 2g(h - \mu_{BC} L)$

CHOQUE



$m\vec v = cte \rightarrow m_1 V_c + m_2 \cancel{V_b^x} = (m_1+m_2) V$

$V = V_c \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = \sqrt{2g(h-\mu L)} \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = 2,42\,m/s$

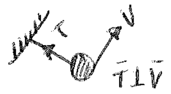
CD

$(W_{TENSIÓN}) + (W_p) = \Delta E_{CIN} \rightarrow$

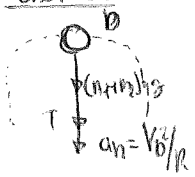
$0 \qquad -\Delta U_p$

$\Delta E_{MEC} = 0 \rightarrow E_{MEC\,C} = E_{MEC\,D} \rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2) \cdot V^2 + m_1 g \cancel{h} = \frac{1}{2}(m_1+m_2) \cdot V_D^2 + (m_1+m_2) g 2R$

$V_D^2 = V^2 - 4gR$



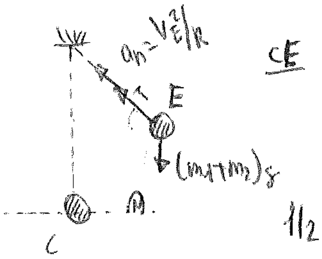
Condición



$\Sigma \vec F = m\vec a$

$T + (m_1+m_2) g = (m_1+m_2) V_D^2/R \rightarrow T = (m_1+m_2)\left(\frac{V_D^2}{R} - g\right) \geq 0$

$V_D^2/R - g \geq 0$ Sustituyo $V_D^2 = V^2 - 4gR \rightarrow h = 2,78\,m \cdot h_{MIN} = 2,78\,m$



CE

$(W_{TENSIÓN}) + (W_p) = \Delta E_{CIN} \rightarrow \Delta E_{MEC} = 0 \qquad E_{MEC\,C} = E_{MEC\,D}$

$0\ \vec T \perp \vec v \qquad -\Delta U_p$

$\frac{1}{2}(m_1+m_2) V^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_E^2 + (m_1+m_2) g \cdot R(1 - \sqrt{2}/2) \rightarrow V_E = 2,27\,m/s$

$\Sigma \vec F = m\vec a \qquad T - (m_1+m_2) g = (m_1+m_2) \cdot V_E^2/R \rightarrow T = 1,53\,N$

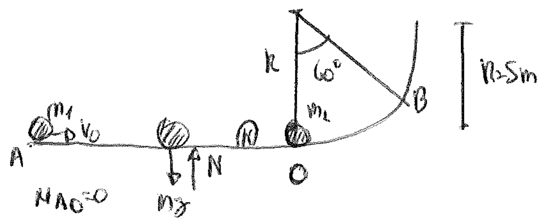
DIN 07

Una partícula de masa $m_1 = 2$ Kg parte de A con velocidad inicial $v_0 = 20$ m/s y desliza sin rozamiento sobre el tramo AO de longitud L. Al llegar m_1 a O, impacta con la partícula de masa $m_2 = 1/2\, m_1$, quedando ambas adheridas y recorriendo el tramo OB. Durante el recorrido OB actúa, además, una fuerza horizontal $\vec F = kx\vec i$ donde x es la coordenada primera en el sistema cartesiano XYZ de la figura. Calcular

(1) Velocidad del conjunto de las partículas tras la colisión

(2) Valor de K para que en el punto B la velocidad del conjunto sea v_0

(3) Trabajo de la fuerza $\vec F$ a lo largo de OB, con el K calculado anteriormente



AO

$W_N + W_P = \Delta E_{CIN} \to \Delta E_{CIN} = 0 \to E_{CIN} = cte$ $\quad E_{CIN\,O} = E_{CIN\,A} \to 1/2\, m_1 v_0^2 = 1/2\, m_1 v_A^2 \to v_0 = v_A = 20$ m/s

0 $N \perp v$ $\quad 0$ (Mismo nivel potencial)

Choque

m_1 m_2

$v_0 \to$ OO $\to v=0$

antes

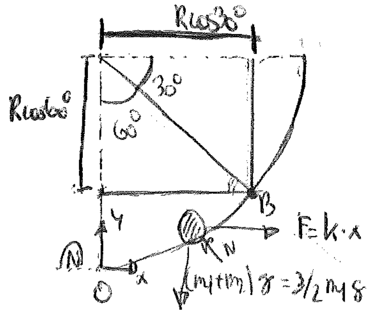
OO $\to v$

$m_T = (m_1+m_2) = m_1 + 1/2\, m_1 = 3/2\, m_1$

después

$m\vec v = cte$ $\quad (m\vec v)_{antes} = (m\vec v)_{después}$

$m_1 \cdot v_0 + m_2 \cancel{v} = 3/2\, m_1 \cdot v \to v = 13{,}33$ m/s



$\vec F = kx\vec i \to rot\, \vec F = 0$ $\quad$ F conservativa $\quad U_F = -\int kx\vec i\, dx\vec i = -1/2\, kx^2$

OB $\quad \to$ Todas son fuerzas conservativas

$W_N + W_P + W_F = \Delta E_{CIN} \to \Delta E_{MEC} = 0 \to E_{MEC\,O} = E_{MEC\,B}$

0 $N \perp v$ $\quad -\Delta U_P$ $\quad -\Delta U_F$

$(R - R\cos 60°) \to$ cota de B

$1/2 \cdot 3/2\, m_1 v^2 + 3/2\, m_1 g \cancel{h_0} - 1/2\, k \cancel{x_0^2} = 1/2 \cdot 3/2\, m_1 v_0^2 + 3/2\, m_1 g\, R(1-\cos 60°) - 1/2\, k\, (R\cos 30°) \to k = 43{,}4$ N/m

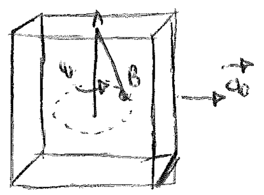
$W_F = -\Delta U_F = -(U_B - U_0) = U_0 - U_B = 1/2\, k \cancel{x_0^2} - (-1/2\, k x_B^2) = 1/2\, k x_B^2 = 1/2\, k(R\cos 30°)^2 = 406{,}8$ J

• DZN 08

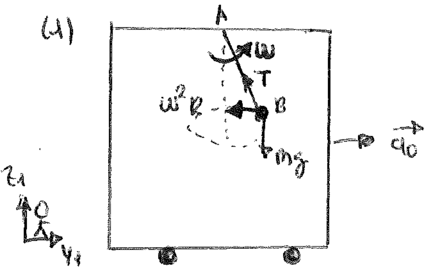
Un vagón se traslada con aceleración $\vec{a_0}$ constante. En el punto A del techo, un mecanismo hace girar la varilla inclinada AB, con velocidad angular ω=cte en torno al eje vertical que pasa por A. En el otro extremo B existe una pequeña masa m, de forma que está describe trayectorias circulares de radio R, respecto del vagón

(1) Dibújense y valórense las fuerzas de inercia que ve, actuando sobre m, un observador situado en reposo respecto al vagón (O_1, X'_1, Y'_1, Z'_1)

(2) Repetir lo mismo, pero esta vez para un observador que además gira acompañando a la masa m, es decir, tal que ve la masa m en reposo con unos ejes (O_2, X'_2, Y'_2, Z'_2) que giran en torno al eje vertical.

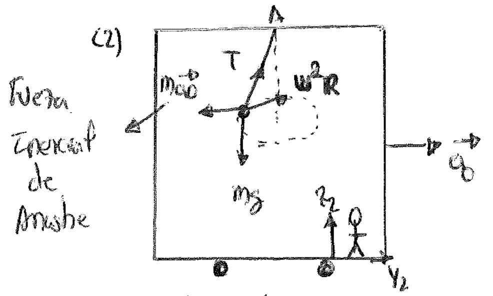


(1)



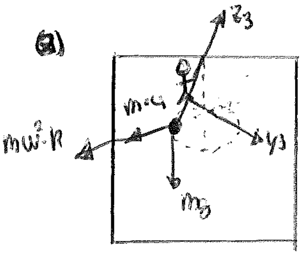
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

(2)



$\Sigma\vec{F} + \vec{F}_{arrt} + \vec{F}_{cor} = m\vec{a}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0$

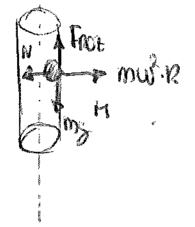
(3)



Fuerzas Reales (peso - tensión) → siempre se ven

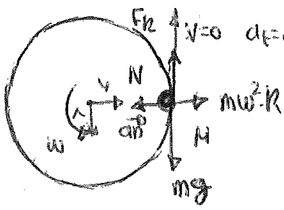
• DZN 09

Una habitación cilíndrica gira alrededor de su eje con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante. Una masa puntual de peso P está en reposo respecto de la habitación apoyada en la pared y a media altura de está, gracias a que entre la masa y la pared existe un rozamiento de valor μ. Dibújese el diagrama de fuerzas que actúan sobre la masa para un observador situado en la habitación. Con las condiciones descritas explíquese si la velocidad angular puede tener cualquier valor, o por el contrario hay valores incompatibles con el equilibrio de la masa.



$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} = 0$

$\Sigma\vec{F}_{Reales} + \vec{F}_{ZA} + \vec{F}_{Zcor} = m\cdot\vec{a_p}$



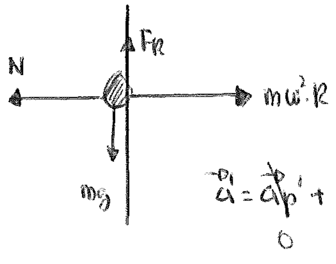
$V=0 \quad a_t = 0 \quad (\omega = cte)$

Sistema Móvil

$\vec{F}_R + \vec{F}_{Z\,arr} + \vec{F}_{Zcoriolis} = m\,\vec{a_p}'$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad V=0$

$\vec{a} = \vec{a_p}' + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0$

$V \neq 0 \quad \to \vec{a_p}$



$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} = 0$

$\vec{a} = \vec{a_p}' + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor}$
$\quad 0 \quad\quad \to m\omega^2\cdot R \quad\quad V=0$

$\vec{j}: N = m\omega^2\cdot R$
$\vec{k}: mg = F_{Roz}$
$\to F_R \leq \mu N$

$\to \quad mg \leq \mu\, m\omega^2\cdot R\ ; \quad \omega^2 \geq g/\mu R \to \omega = \sqrt{g/\mu R}$

• DIN 10

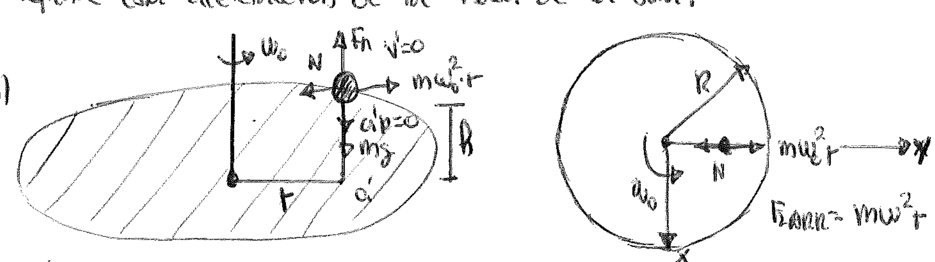
Sobre un disco de madera horizontal se ha clavado un alambre vertical a una distancia r del centro O del disco. El disco gira en torno a su eje con una velocidad angular ω_0 constante. En estas condiciones se inserta en el alambre una bolita de madera de masa m, que puede deslizarse a lo largo del alambre con un rozamiento de coeficiente μ. Inicialmente la bolita está en reposo respecto del alambre

(1) Dibujar el esquema de fuerzas sobre la bolita en dicho instante inicial para un observador ligado al disco

(2) Si la bola desciende debido a la acción de su peso, por el alambre, razonar en que cambia el esquema de fuerzas para el observador unido al disco

(3) En el caso anterior, ¿cuál será el valor de la aceleración relativa de la bola respecto del disco ¿Depende esta aceleración de la masa de la bola?

(1)

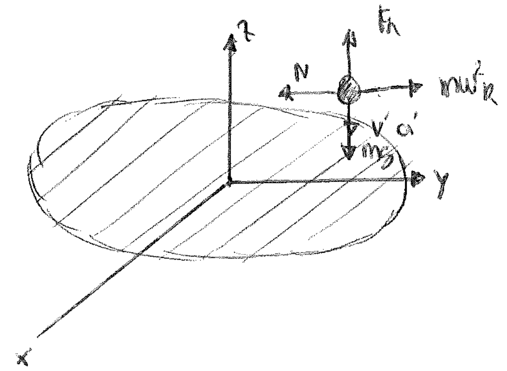


$\vec{F}_{REALES} + \vec{F}_{ZARR} + \vec{F}_{ZCOR} = a'p\, m$

$\vec{a}_{cor} = 2\,\omega_{ARR} \times V_p'$
$\downarrow 0$

La única aceleración que se dibuja en relativo solo es la a'

(2)



$\vec{a}_{cor} = 2\,\omega_{ARR} \times V_p' = 0$
$(v_p' \parallel w)$

(3) $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}'$

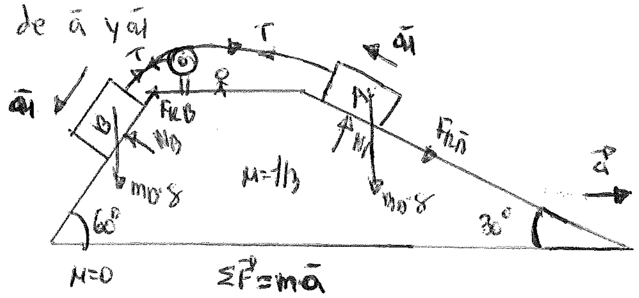
$\vec{j}$: $N - m\omega_0^2 r = 0 \rightarrow N = m\omega_0^2 r$

$\vec{k}$: $mg - F_R = ma' \rightarrow mg - \mu m\omega_0^2 r = ma' \rightarrow a' = g - \mu\omega_0^2 r$ No depende de la masa

• DZN 11

La doble cuña C de la figura se mueve sobre el plano horizontal con rozamiento despreciable y una aceleración constante $\vec{a}$. Sobre el plano inclinado de la derecha, un bloque A de 3/2 Kg se mueve ascendiendo por el plano con una aceleración $\vec{a}_1$ respecto del mismo. Por el plano inclinado de la izquierda desciende otro bloque B de masa 1 Kg, siendo nula la reacción normal del plano sobre el. Los bloques A y B están unidos por un hilo ideal a través de una polea P de masa y rozamientos despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre los bloques A y B y los planos inclinados es $\mu = 1/3$, se pide hallar los valores de $\vec{a}$ y $\vec{a}_1$

$m_A = 1{,}5$ Kg
$m_B = 1$ Kg



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

B

$\sum\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ $\quad m_B\cdot a\cdot\cos 60° + m_B\cdot g\cdot \text{sen}\,60° - \cancel{F_{R_B}} - T = m_B\cdot a_1 \to -T + 2/\sqrt{3}\, g = a_1$

$\cancel{N_B} - m_B\cdot g\cos 60° + m_B\, a\,\text{sen}\,60° = 0 \to a = g/\sqrt{3}$

$a_1 = 2/5\sqrt{3}\; g$

A

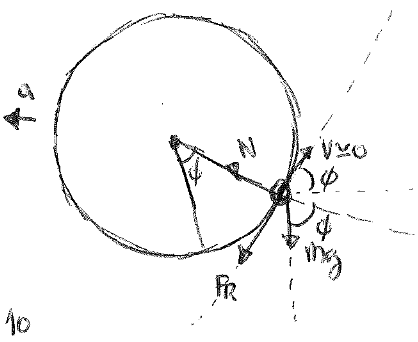
$\sum\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ $\quad T - F_{R_A} + m_A\cdot a\cdot\cos 30° - m_A\cdot g\,\text{sen}\,30° = m_A\cdot a_1 \to T - \sqrt{3}/3\, g = 3/2\, a_1$

$N_A - m_A\cdot g\cdot\cos 30° - m_A\cdot a\cdot\text{sen}\,30° = 0 \to N_A = g\sqrt{3}$

• DZN 12

Un alambre en forma de circunferencia de radio R=1m y dispuesto en el plano vertical, contiene una anilla de masa m=10g insertada en su interior e inicialmente situada en reposo en su parte inferior. A continuación se comienza a mover el alambre con una aceleración constante de 15 m/s² de dirección horizontal y en el plano del alambre. Al cabo de un cierto tiempo, al ascender la anilla por el alambre, esta alcanza su equilibrio dinámico. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre la anilla y el alambre es $\mu = 0{,}2$:

(1) Posición (ángulo ϕ) en la que está situada la anilla cuando se alcanza el equilibrio dinámico
(2) Reacción ejercida por el alambre sobre la anilla



$\sum\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ (Hemos llegado al equilibrio dinámico (estática))

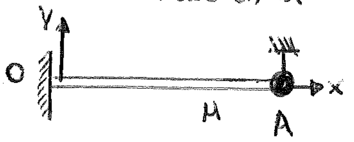
I: $N - mg\cos\phi - ma\,\text{sen}\,\phi = 0 \to N = ma\,\text{sen}\,\phi + mg\cos\phi = 0{,}1\,N \qquad F_R = \mu\cdot N$

II: $F_R + mg\,\text{sen}\,\phi - ma\cos\phi = 0 \to \mu(ma\,\text{sen}\,\phi + mg\cos\phi) + mg\,\text{sen}\,\phi - ma\cos\phi = 0$

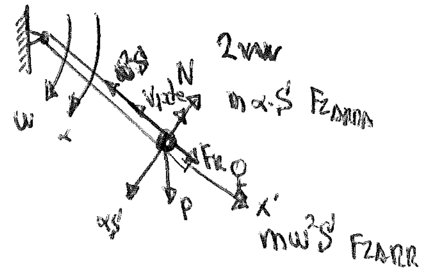
$0{,}128\,\text{sen}\,\phi - 0{,}1304\cos\phi = 0 \to \text{tg}\,\phi = 1{,}018 \quad \phi = 45{,}53°$

• DIN 13

Una varilla homogénea de longitud L y peso P, se halla inicialmente en el plano vertical colgada del techo por su extremo A mediante un hilo y sujeta a una pared mediante una articulación en O que le permite girar. En cierto instante se corta el hilo y la varilla comienza a girar alrededor de O. Simultáneamente una partícula comienza a desplazarse sobre la varilla con velocidad v_r=cte respecto a ella, partiendo de A en dirección a O. Se pide realizar un esquema de fuerzas que actúan sobre la partícula para un observador situado en la varilla y moviéndose con ella.



$$\sum \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{zarr} + \vec{F}_{zc} = m\vec{a}'_p = 0 \text{ (porque la velocidad=cte} \rightarrow a=0)$$



$$\vec{a}_{cor} = 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & -\omega \\ -v & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2v\omega\vec{j}'$$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

CH castiñeira

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

==

Estática del punto.

- $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Estática del sólido rígido (plana).

- $\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\rightarrow$ 2 ecuaciones $\begin{cases} \sum \vec{F_x} = 0 \\ \sum \vec{F_y} = 0 \end{cases}$
- $\sum \overrightarrow{M_0} = \vec{0}$ $\rightarrow$ 1 ecuación , siendo O un punto cualquiera. Criterio de signos para los momentos:

$$\begin{cases} \text{antihorario} \rightarrow \text{positivo} \\ \text{horario} \rightarrow \text{negativo} \end{cases}$$

$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$. Donde el módulo de $M_0 = F \cdot d$, siendo d = brazo = mínima distancia de O (donde estoy tomando momentos) hasta la recta de acción de la fuerza. Si no tomo la mínima distancia, tendré que multiplicar por el seno del ángulo.

SI UN SÓLIDO ESTÁ SOMETIDO A 3 FUERZAS NO PARALELAS, PARA QUE ESTÉ EN EQUILIBRIO, TIENEN QUE SER FUERZAS CONCURRENTES (sus líneas de acción)

CONTACTOS

CONTACTO LISO EN UN PUNTO $\rightarrow$ $\mu = 0$

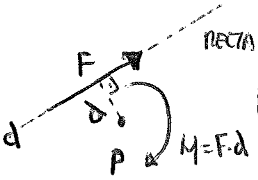
CONTACTO RUGOSO EN UN PUNTO $\rightarrow$ $\mu \neq 0$

- *No desliza*: $F_R \leq \mu N$ y no sabemos su sentido (ni su módulo), lo sabremos como solución del problema.
- *Desliza*: (o a punto de deslizar) $F_R = \mu N$ y el sentido ha de ser contrario al sentido del movimiento.

ESTÁTICA

$\Sigma\vec{F}=0 \begin{cases} F_x=0 & (1) \\ F_y=0 & (2) \end{cases}$

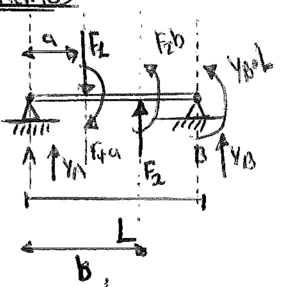
$\Sigma M=0$ (3) $M=F\cdot d$



$\overset{\frown}{M_P}=F\cdot d$

$F_R \leq \mu \cdot N$

MOMENTOS



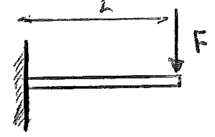
(1) $\uparrow^+$ $Y_A+Y_B+F_2-F_1=0$

(2) $\Sigma M_A=0$ $-F_1 a+F_2 b+Y_B\cdot L$

Giro Horario (-)

Giro Antihorario (+)

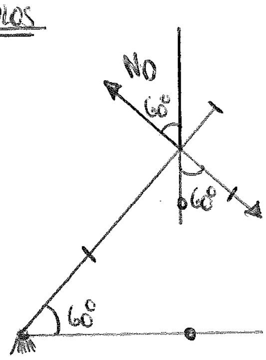
Para obtener y tomar momentos el mejor punto es por el que más reacciones pasen (fuerzas).



M_A $\uparrow Y_A$ (1) $Y_A-F=0$ $Y_A=F$

(2) ΣM_A $M_A-F\cdot L=0$ $M_A=F\cdot L$

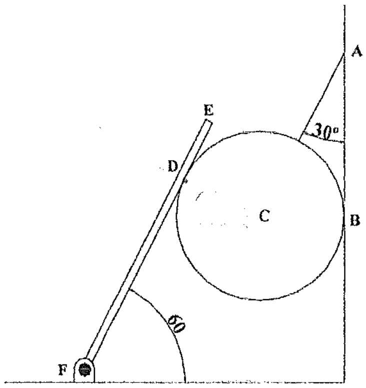
ÁNGULOS



EST.01. - Un disco homogéneo liso de peso P=90N cuelga del punto A de la pared mediante un hilo que forma un ángulo de 30° con la vertical. Sobre el disco se apoya una varilla EF de igual peso P y que está articulada en su extremo F en el suelo, formando un ángulo de 60° con la horizontal. La longitud FD desde la articulación al punto de apoyo sobre el disco es ¾ de la longitud EF de la varilla. Se pide en la posición de equilibrio:

1.- Valor de la tensión del hilo.
2.- Componentes de la reacción en la articulación.
3.- Si se suprime la articulación F y la varilla se apoya sobre el suelo en la misma posición dada, determinar el mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ entre la varilla y el suelo para que la varilla pueda permanecer en equilibrio.

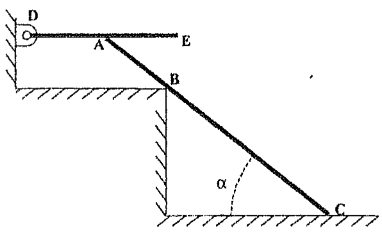
(Febrero-2004)



EST.02. - En el sistema de la figura, la varilla homogénea DE, de peso P_1=10N, está acoplada a la pared por medio de una articulación y se apoya por su punto medio en el extremo A de la varilla homogénea AC, de longitud L=2m y peso P_2=20N. Se sabe que la longitud AB es la cuarta parte de AC y que todos los apoyos son lisos, menos en C, en el que existe un coeficiente de rozamiento μ desconocido, del que se sabe que tiene el mínimo valor compatible con el equilibrio. El ángulo α es de 60°. Se pide:

1.- Calcular el módulo, dirección y sentido de la reacción de la articulación sobre la varilla DE.
2.- Calcular las reacciones sobre la varilla AC en los apoyos A, B y C.
3.- Valor de μ.

(Septiembre-2006)



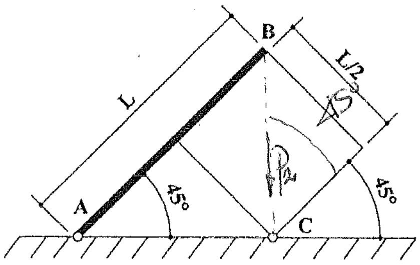
ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

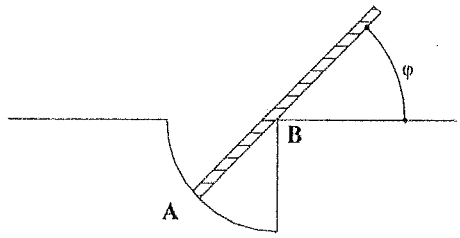
EST.03. - Una varilla de longitud L y peso P_1 está en equilibrio apoyándose sobre una placa cuadrada de peso P_2 y lado L/2 como se muestra en la figura. La varilla está articulada al suelo en su extremo A y la placa está articulada al mismo suelo en C. Se pide:

1) Calcular las reacciones en A y C.
2) Si la placa no estuviera articulada en C sino simplemente apoyada, razónese qué valores del coeficiente de rozamiento serán compatibles con el equilibrio.



(Diciembre-2006)

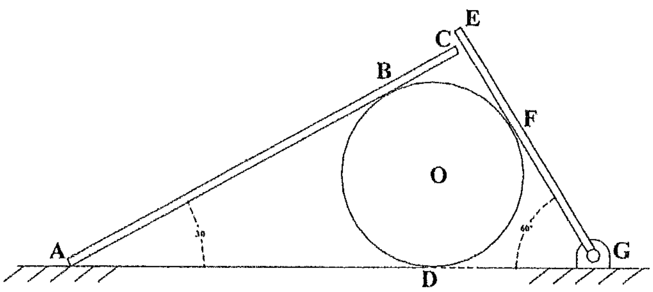
EST.04. - Una varilla homogénea de peso P y longitud L, se apoya en la esquina lisa B y en su extremo A en el arco de circunferencia rugosa de centro B y radio R siendo L=3R. La varilla forma un ángulo φ conocido con la horizontal. Hallar el mínimo valor del coeficiente de rozamiento en A para que la varilla esté en equilibrio.



EST.05. - En el sistema en equilibrio de la figura, la varilla ABC tiene un peso P=10N y longitud L=1m y está apoyada en A con rozamiento y en B sin rozamiento. El rodillo de centro O, radio R=0,2m y peso P=10N, se apoya en D con rozamiento. La varilla EFG está articulada en G, tiene peso P=10N y L=0,5m.El apoyo F de la varilla EFG en el rodillo es liso. Se pide:

1.- Mínimo valor del coeficiente de rozamiento en A compatible con el equilibrio.
2.- Módulo de la reacción de la articulación en G y ángulo que forma con el suelo.
3.- Módulo y sentido de la fuerza de rozamiento en D.

(Febrero-2008)



PROBLEMAS ESTÁTICA

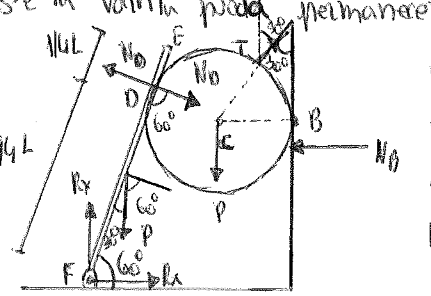
- EST 01

Un disco homogeneo liso de peso P=90 N cuelga del punto A de la pared mediante un hilo que forma un ángulo 30° con la vertical. Sobre el disco se apoya una varilla EF de igual peso P y que está articulada en su extremo F en el suelo, formando un ángulo 60° con la horizontal. La longitud FD desde la articulación al punto de apoyo sobre el disco es 3/4 de la longitud EF de la varilla. Se pide en la posición de equilibrio:

(1) Valor de la tensión del hilo

(2) Componentes de la reacción en la articulación

(3) Si se suprime la articulación F y la varilla se apoya sobre el suelo en la misma posición dada, determinar el mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ entre la varilla y el suelo para que la varilla pueda permanecer en equilibrio

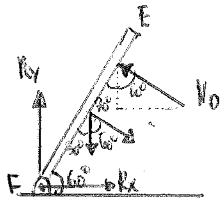


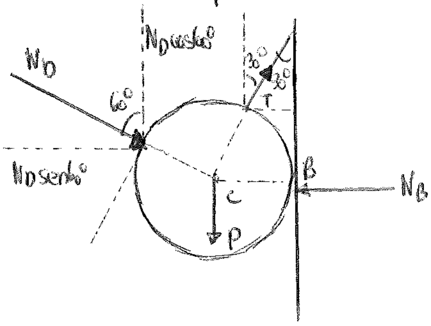
Disco P=90 N

Varilla EF P=90 N

FD 3/4 L DE 1/4 L

N_D (reacción interna)





(1) DISCO

(1) $\sum \vec{F}_x = 0$ $N_D \cdot \operatorname{sen}60° + T \operatorname{sen}30° - N_B = 0$

(2) $\sum F_y = 0$ $P + N_D \cos 60° - T \cdot \cos 30° = 0$

(3) $\sum M_C = 0$ $0 = 0$ (Momentos concurrentes)

VARILLA

(1) $\sum \vec{F}_x = 0$ $R_x - N_D \operatorname{sen}60° = 0$

(2) $\sum F_y = 0$ $P - R_y - N_D \cos 60° = 0$

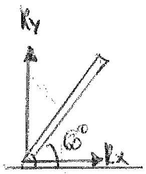
(3) $\sum M_F = 0$ $N_D \cdot 3/4 \cdot L - P \cos 60° \, L/2 = 0$

$N_D = (P \cdot \cos 60° \cdot L/2) / (3/4 \cdot L) = (90 \cdot \cos 60° \cdot 1/2) / (3/4) = \frac{90 \cdot \cos 60° \cdot 1/2 \cdot 4}{3} = 30 N$

$R_x = N_D \operatorname{sen} 60° = 30 \cdot \operatorname{sen} 60° = 15\sqrt{3}$ N $\quad R_y = P - N_D \cos 60° = 90 - 30 \cos 60° = 75 N$

$T = (P + N_D \cos 60°) / \cos 30° = (90 + 30 \cos 60°) / \cos 30° = 121{,}24 N$

(2)



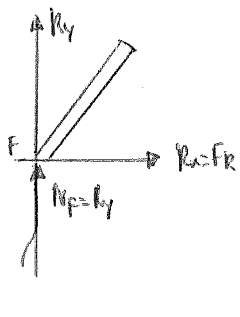
$R_x = 15\sqrt{3}$ N

$R_y = 75$ N

$R_T = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (75)^2} = 30\sqrt{7}$ N

$\operatorname{tg} \beta = R_y / R_x \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(R_y / R_x) = 83{,}4°$

(3)



$F_R \leq \mu \cdot N \rightarrow \mu = F_R / N \rightarrow \mu \geq R_x / R_y = 15\sqrt{3} / 75 = 0{,}346$

$\mu_{mínimo} = 0{,}346$

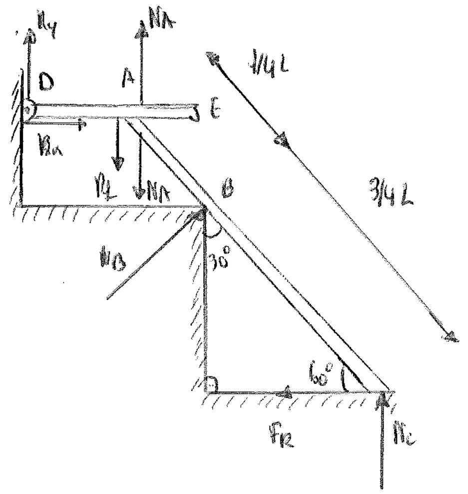
• 2ST 02

En el sistema de la figura, la varilla homogenea DE, de peso $P_1 = 10$ N, esta acoplada a la pared por medio de una articulación y se apoya por un punto medio en el extremo A de la varilla homogénea AC, de longitud $L = 2$ m y peso $P_2 = 20$ N. Se sabe que la longitud AB es la cuarta parte de AC y que todos los apoyos ~~son~~ lisos, menos en C, en el que existe un coeficiente de rozamiento μ desconocido, del que se sabe que tiene el mínimo valor compatible con el equilibrio. El ángulo α es de 60°, se pide:

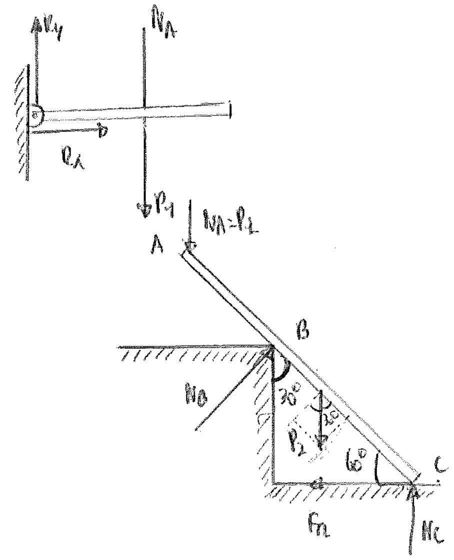
(1) Calcular el módulo, dirección y sentido de la reacción de la articulación sobre la varilla DE.

(2) Calcular las reacciones sobre la varilla AC en los apoyos A, B y C

(3) Valor de μ



Varilla DE $P_1 = 10$ N
Varilla AC $P_2 = 20$ N 2m
AB 1/4 BC 3/4
μ existe en C
α = 60°
A (punto medio DE)
N_A (reacción interna)



(1) VARILLA ACOPLADA

(1) $\sum \vec{F_x} = 0$ $R_x = 0$

(2) $\sum F_y = 0$ $R_y + N_A - P_1 = 0 \rightarrow R_y = 0$

(3) $\sum \overset{\curvearrowright}{M_D} = 0$ $N_A \cdot a - P_1 \cdot a = 0 \rightarrow N_A = P_1 = 10$ N

$R_T = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0$ $R_x = 0$ $R_y = 0$ $\operatorname{tg} \beta^\circ = R_y / R_x \rightarrow \beta^\circ = \operatorname{arctg}(R_y / R_x) =$

(2) VARILLA SIN ACOPLAMIENTO

(1) $\sum \vec{F_x} = 0$ $N_B \cdot \operatorname{sen} 60° - F_R = 0 \rightarrow F_R = N_B \operatorname{sen} 60° = 11{,}54$ N

(2) $\sum F_y = 0$ $N_A + P_2 - N_C - N_B \cos 60° = 0 \rightarrow N_C = N_A + P_2 - N_B \cos 60° = 23{,}335$ N

(3) $\sum \overset{\curvearrowright}{M_C} = 0$ $-N_B \cdot 3/4 L + N_A \cdot L \cdot \cos 60° + P_2 \cdot L/2 \cdot \cos 60° = 0 \rightarrow N_B = \dfrac{N_A L \cos 60° + P_2 \cdot L/2 \cdot \cos 60°}{3/4 \cdot L} = 13{,}33$ N

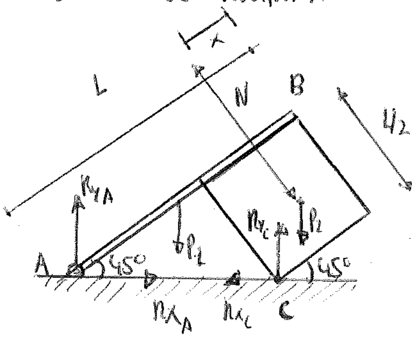
(3) $F_R \leq \mu \cdot N \rightarrow \mu \geq F_R / N \geq 11{,}54 / 23{,}335 \geq 0{,}495$ $\mu_{mínimo} = 0{,}495$

• EST 03

Una varilla de longitud L y peso P_1 está en equilibrio apoyándose sobre una placa cuadrada de peso P_2 y lado $L/2$ como se encuentra en la figura. La varilla está articulada al suelo en su extremo A y la placa está articulada al mismo suelo en C. Se pide:

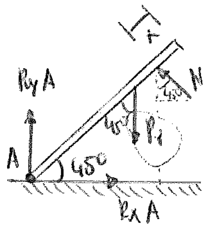
(1) Calcular las reacciones en A y C

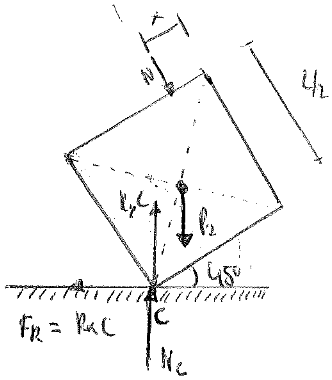
(2) Si la placa no estuviera articulada en C si no simplemente apoyada, rozándose qué valores del coeficiente de rozamiento serán compatibles con el equilibrio.



Varilla AB 1m P_1

Placa Cuadrada P_2 $L/2$





(1) VARILLA

(1) $\Sigma \vec{F_x} = 0$ $\quad R_xA - N \cdot \sqrt{2}/2 = 0$

(2) $\Sigma \vec{F_y} = 0$ $\quad R_yA - P_1 + N \cdot \sqrt{2}/2 = 0$

(3) $\Sigma M_A^R = 0$ $\quad N \cdot (L - x) - P_1 \cdot L/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 0$

CHAPA

(1) $\Sigma \vec{F_x} = 0$ $\quad N \cdot \sqrt{2}/2 - R_xC = 0$

(2) $\Sigma R_y = 0$ $\quad P_2 + N_c \sqrt{2}/2 - R_yC = 0$

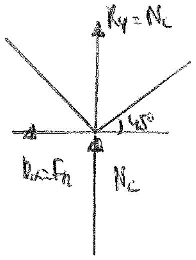
(3) $\Sigma \vec{F_M}_C = 0$ $\quad -N \cdot (L/2 - x) = 0 \rightarrow L/2 = x$

Momento P_2 en el punto C = 0

$$N(L - L/2) - P_1 \cdot L/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 0 \rightarrow N = \frac{P_1 \cdot L/2 \cdot \sqrt{2}/2}{L/2} = P_1 \cdot \sqrt{2}/2$$

$R_xA = 1/2\, P_1 \quad R_yA = 1/2\, P_1$ $\qquad R_xC = 1/2\, P_1 \quad R_yC = P_2 + 1/2\, P_1$

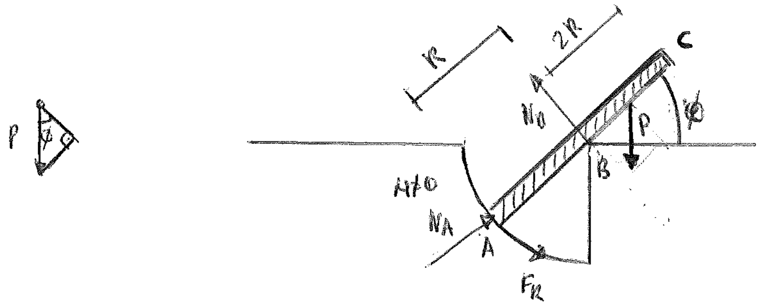
(2)



$$F_R \leq \mu \cdot N \rightarrow \mu \geq F_R/N \geq \frac{1/2\, P_1}{P_2 + 1/2\, P_1} = \frac{P_1}{P_1 + 2P_2}$$

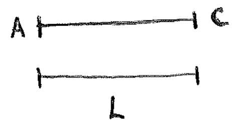
EST 04

Una varilla homogenea de peso P y longitud L, se apoya en la esquina lisa B y en su extremo A en el arco de circunferencia rugosa de centro B y radio R siendo L=3R. La varilla forma un ángulo ϕ conocido con la horizontal. Hallar el mínimo valor del coeficiente de rozamiento en A para que la varilla este en equilibrio



Varilla P y L

R=3R



(1) $\sum \vec{F_x} = 0 \quad N_A - P\,sen\,\phi = 0 \rightarrow N_A - P\,sen\,\phi = 0$

(2) $\sum F_y \uparrow = 0 \quad N_B - F_R - P\cos\phi = 0 \rightarrow N_B = F_R + P\cos\phi$

(3) $\sum M_A = 0 \quad N_B \cdot R - P\cos\phi \cdot 1{,}5R = 0 \quad ó \quad \sum M_B = 0 \quad F_R \cdot R - P\cos\phi \cdot 0{,}5R = 0$

$\hookrightarrow N_B = \dfrac{P\cos\phi \cdot 1{,}5R}{R} = P\cos\phi\, 1{,}5 \qquad \hookrightarrow F_R = \dfrac{P\cos\phi\, 0{,}5R}{R} = P\cos\phi\, 0{,}5$

$F_R \leq \mu \cdot N_A \rightarrow \mu = F_R/N_A \geq \dfrac{P\cos\phi\, 0{,}5}{P\,sen\,\phi} \geq 1/2 \cot g\,\phi \rightarrow \mu_{mínimo} = 1/2 \cot g\,\phi$

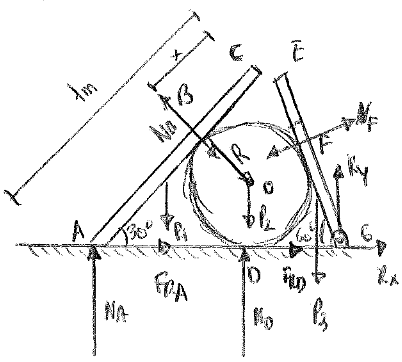
• EST 05

En el sistema en equilibrio de la figura, la varilla ABC tiene un peso P_1=10 N y longitud L=1m y esta apoyada en A con rozamiento y en B sin rozamiento. El rodillo de centro O, radio R=0,2 m y peso P_2=10 N, se apoya en D con rozamiento. La varilla EFG esta articulada en G, tiene peso P_3=10 N y L=0,5 m. El apoyo F de la varilla EFG en el rodillo es liso. Se pide:

(1) Mínimo valor del coeficiente de rozamiento en A compatible con el equilibrio

(2) Modulo de la reacción de la articulación en G y angulo que forma con el suelo

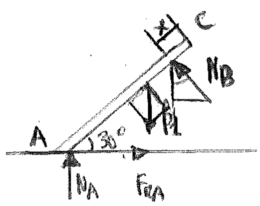
(3) Modulo y sentido de la fuerza de rozamiento en D.



Varilla ABC L=1m P_1=10 N

Rodillo centro O R=0,2m P_2=10 N

Varilla EFG P_3=10 N L=0,5m



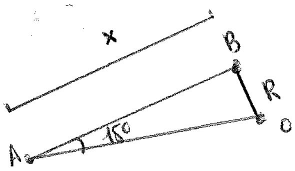
(4)

VARILLA AC

(1) $\sum \vec{F_x} = 0$ $\quad F_{RA} - N_B \operatorname{sen} 30° = 0$

(2) $\sum F_y \uparrow = 0$ $\quad N_A - P_1 + N_B \cos 30° = 0$

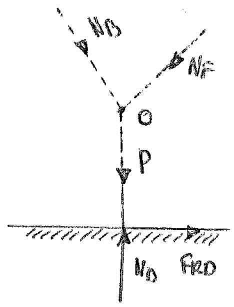
(3) $\sum M_A = 0$ $\quad - P_1 \cos 30° \cdot l/2 + N_B \cdot x = 0$



$tg\, 15° = R/x \,,\; x = R/tg\,15° = 0{,}746\ m$

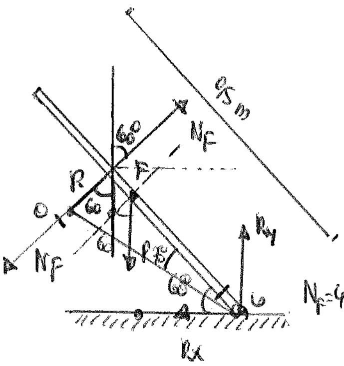
$N_B = 5{,}8\,N \quad N_A = 4{,}97\,N \quad F_{RA} = 2{,}9\,N$ $\quad F_R \le \mu N \rightarrow \mu \ge F_R/N = 0{,}617 \rightarrow \mu_{MINIMO} = 0{,}617$

(3)



$\sum M_O = 0$ $\quad F_{RD} \cdot R = 0 \rightarrow F_{RD} = 0$

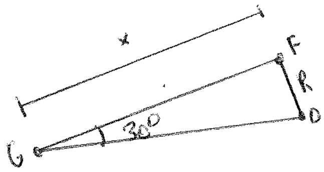
(2)



$\sum F_x \xrightarrow{+} N_F \operatorname{sen} 60° - R_x = 0$

$\sum F_y \uparrow + \quad R_y + N_F \cos 60° - P = 0$

$\sum M_G \quad - P \cos 60° \cdot l/4 + N_F \cdot x = 0$



$tg\, 30° = R/x \,,\; x = R/tg\,30° = 0{,}346$

$N_F = 4{,}24\,N \quad R_x = 3{,}126\,N \quad R_y = 8{,}145\,N \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 8{,}77\,N \quad tg\,\beta = R_y/R_x \rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(R_y/R_x) = 69{,}12°$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

1. - DENSIDAD. - Es la masa del cuerpo por unidad de volumen → $\rho = \frac{m}{V}$. Se expresa generalmente en las siguientes unidades: $(\frac{g}{cm^3}, \frac{kg}{m^3})$. *Por ejemplo en el caso del agua estos valores son*: $(1 \frac{g}{cm^3}, 1000 \frac{kg}{m^3})$.

2. - PRESIÓN. - Es la fuerza por unidad de superficie, siendo la propia fuerza(F) normal a la superficie y el área(A) de la superficie sobre la que la fuerza está distribuida → $p = \frac{F}{A}$. *Se trata de una magnitud escalar.*

Unidades:

- SISTEMA INTERNACIONAL. (S.I.):

$$\boxed{\mathrm{Pa(pascal)} = \frac{N}{m^2} \quad ; \quad 1\,\mathrm{atm(atmósfera)} = 10^5\ \mathrm{Pa}}$$

- C.G.S.

$$\boxed{\mathrm{bar} = 10^6\,\mathrm{barias} = 10^5\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{atm}}$$

- SISTEMA TÉCNICO.

$$\boxed{760\,\mathrm{mm\,Hg} = 1\,\mathrm{atm} = 10^5\,\mathrm{Pa}}$$

3 - ECUACIÓN GENERAL DE LA HIDROSTÁTICA. -

Se considera la ecuación: $\vec{f_p} = \frac{d\vec{F_p}}{dm} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}\,p}$, donde:

- $\vec{f_p} \equiv$ fuerza en el seno del fluido por unidad de masa.
- $\rho \equiv$ densidad del fluido.
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,p} \equiv$ gradiente de presiones.

En el caso de que el fluido esté sometido al campo gravitatorio terrestre:

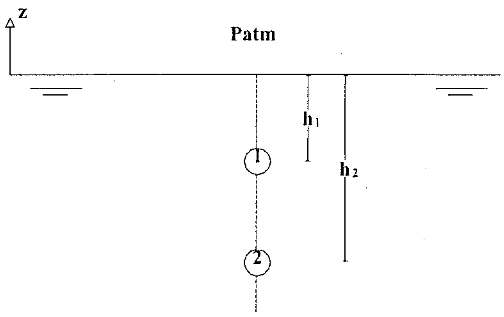
$\vec{f_m} + \vec{f_p} = m\vec{a} = 0$ (al estar en hidrostática) $\rightarrow \vec{f_p} = -\vec{f_m} = -\vec{g}$

donde $\vec{f_m} \equiv$ fuerzas másicas por unidad de masa.

La ecuación queda por tanto → $-\vec{g} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}\,p}$ → $\vec{g} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}\,p}$, luego:

$P_{manométrica} = P_{gas} - P_{atm}$

$$-g\vec{k} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) \rightarrow -g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow dp = -g\rho dz$$



$$\int_1^2 dp = \int_1^2 -g\rho dz \rightarrow p_2 - p_1 = -g\rho(z_2 - z_1) = -g\rho(h_1 - h_2) = g\rho(h_2 - h_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)}$$

Y en general:

$$\boxed{p = p_{atm} + \rho g h}$$

4. - PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES.

Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido, experimenta un empuje hacia arriba (por parte del fluido), igual al peso del volumen de fluido que desaloja.

$$\boxed{E = \rho g V_{sum}}$$

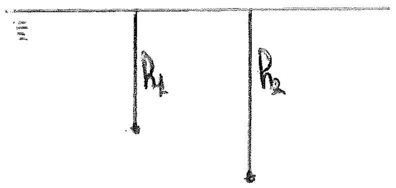
(Aplicado en el "centro de carena", que es el centro de masas de la zona sumergida).

5. - PRESIÓN MANOMÉTRICA.

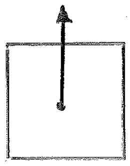
$$\boxed{p_{manométrica} = p_{absoluta} - p_{atmosférica}}$$

Donde: $p_{absoluta} \geq 0$; $p_{manométrica} (<, > \text{ ó } = 0, \text{pero} > -1\,\text{atm})$

HIDROSTÁTICA



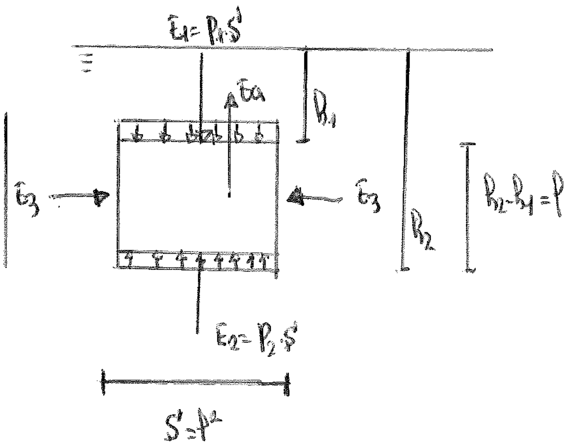
$$\begin{cases} P_1 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_1 \\ P_2 = P_{atm} \cdot \rho \cdot g\, h_2 \end{cases} \rightarrow P_2 - P_1 = \rho \cdot g\,(h_2 - h_1) \qquad P = P_{atm} + \rho g h$$



Empuje Arquímedes = $\rho_{líquido} \cdot g \cdot V_{sumergido}$

$\rho = m/V$ $\quad P_{manométrica} = P_{gas} - P_{ATM}$ $\quad$ Fuerza = Presión · Superficie

- Demostración del empuje de arquímedes



$$E_a = E_2 - E_1 = P_2 \cdot S' - P_1 \cdot S' = \left((P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_2) - (P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_1)\right) l^2$$

$$E_a = \rho g\,(h_2 - h_1) \cdot l^2 = \rho \cdot g \cdot l^3 = \rho \cdot g \cdot V_{sumergido}$$

ACADEMIA CASTIÑEIRA

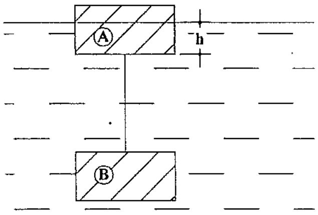
SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

===

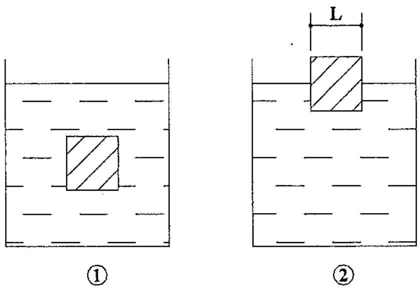
HID.01. - El esquema de la figura, muestra dos cuerpos de igual tamaño (altura H y área de sus bases S) que se encuentran unidos por un hilo inextensible y sin masa. Se sabe que cuando $h = \frac{5}{6}H$, el sistema flota y permanece en equilibrio, siendo la densidad de A la mitad de la densidad ρ del líquido. Si la densidad de B es $K\rho$, se pide:

1) Calcular los valores de K y la tensión del hilo.
2) Si se cambia la configuración del sistema, situando B donde estaba A y viceversa, ¿ Existirá equilibrio ?.



(Septiembre-1998)

HID.02. - En una cubeta que contiene un líquido con densidad ρ_L, se deposita un sólido de forma cúbica, lado L y densidad ρ_S tal que $\rho_L < \rho_S$, de la forma que indica la figura (1). Simultáneamente en otra cubeta idéntica, se sitúa un sólido igual pero con la mitad sumergida, tal como muestra la figura (2). Ambos sólidos partiendo del reposo comienzan simultáneamente a descender. Razonar con qué aceleración comienzan a descender ambos. ¿ Son iguales ?.

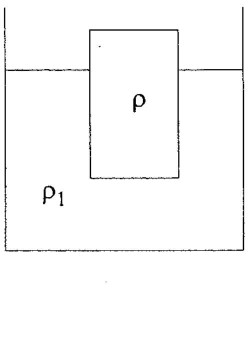


(Febrero-2000)

HID.03. - Se tiene un cilindro homogéneo de radio "r", altura "h" y densidad ρ, flotando en un líquido-1 de densidad ρ_1, según se muestra en la figura. Deducir la fórmula para la fracción $\eta = \frac{V_S}{V}$ del volumen del cilindro que queda sumergido respecto de su volumen total, expresando η en función de ρ y ρ_1 exclusivamente.

Si ahora se añade otro líquido-2, inmiscible con el líquido-1, de densidad $\rho_2 < \rho_1$, hasta que el nivel del nuevo líquido se iguale con la altura del cilindro que emerge del líquido-1, deducir el nuevo porcentaje η de volumen del cilindro que queda sumergido en el líquido-1 en función de ρ, ρ_1 y ρ_2 exclusivamente. Despreciar la acción de la presión atmosférica.

(Febrero-2006)



ACADEMIA CASTIÑEIRA

SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

HID.04. - Un cubo de lado L se compone en una de sus mitades de un material de densidad ρ_1 y en la otra de otro material de densidad ρ_2. El cubo se deposita en un recipiente con agua de forma que el material de densidad ρ_1 esté situado en la parte inferior. Razonar la longitud de la parte sumergida del cubo.

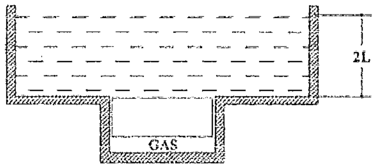
(Diciembre-2005)

HID.05. - Un bloque ortoédrico de dimensiones a, b y c, está en equilibrio en el seno de un líquido en un depósito de densidad ρ. Se coloca primero con el lado a vertical y después con el lado b vertical, siendo b mayor que a. Se pide:

1.- Discutir en qué caso la diferencia entre las presiones en las caras superior e inferior del bloque es mayor.
2.- Razonar porqué siendo estas diferencias de presión distintas según el caso, puede existir equilibrio en ambos casos.
3.- Si la presión en los puntos de la cara superior en el caso (1) es de 1 atm y en el caso (2) es de 1024 milibares, ¿en qué caso está la superficie superior del bloque más próxima a la superficie libre del líquido?.

(Diciembre-2003)

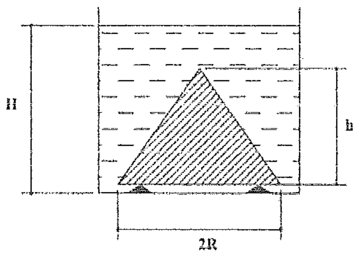
HID.06. - Un depósito de líquido de densidad ρ está lleno hasta una profundidad de 2L. En el fondo del depósito existe un tapón en forma de cubo de lado L y densidad $\rho/2$. En la parte inferior del tapón existe un gas. Determinar la relación entre la presión manométrica del gas y el valor de L para que el tapón permanezca en equilibrio.



(Diciembre-2002)

HID.07. - Un cono de altura h y radio R, posee una densidad mayor que la del agua. Dicho cono se deposita con su base situada sobre unos pequeños apoyos, de tamaño despreciable, en el fondo de una cubeta llena de agua, de forma que la superficie del agua tiene una altura H>h respecto del fondo. Determinar la resultante de las fuerzas de presión que ejerce el agua sobre la superficie lateral del cono.

(Septiembre-2001)



ACADEMIA CASTIÑEIRA

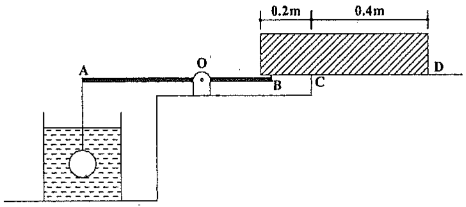
SANTIAGO RUSIÑOL, 4
91 533 82 01 - 91 534 16 64
28040 MADRID

MINAS
Asignatura: FÍSICA-I
Profesor: Borja Nájera

HID.08. - La varilla AB de la figura, lisa, de peso despreciable y articulada en O, tal que OA=2OB, está en equilibrio en su posición horizontal debido al peso P=10N de la bola sumergida en el líquido de densidad de valor mitad que la densidad de la bola y, por el otro extremo B, al contacto con un bloque de peso Q=30N, que se mantiene apoyado sobre un suelo rugoso horizontal de coeficiente de rozamiento $\mu = 0.5$. La longitud del bloque es 3L=0.6m, estando apoyado sobre el suelo la distancia CD=0.4m. Se pide:

a) Calcular la tensión del hilo vertical que une la bola al extremo A de la varilla.
b) Valor de la reacción normal y de la fuerza de rozamiento que el suelo ejerce sobre el bloque de peso Q, estudiando dónde se halla situada la recta soporte de la reacción normal.

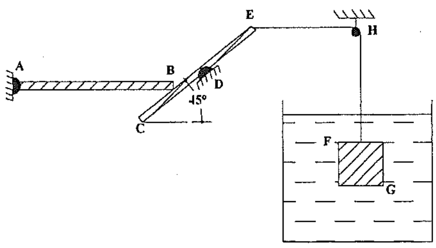
(Junio-2002)



HID.09. - Una varilla AB de peso $P_1 = 20\,N$, está articulada a la pared en su extremo A y se apoya sin rozamiento en B sobre una segunda varilla homogénea CE, siendo B el punto medio de CD. Esta varilla permanece en equilibrio formando 45° con la horizontal, estando articulada en su punto medio D. A su extremo E está unido un hilo del que tras un apoyo liso en H, cuelga un peso $P_3 = 15\,N$ que permanece en equilibrio en un líquido de densidad desconocida. Se pide calcular:

1) Reacción en la articulación A y tensión del hilo.
2) Diferencia de presiones entre los puntos G y F, siendo la sección del bloque $S = 50\,cm^2$.

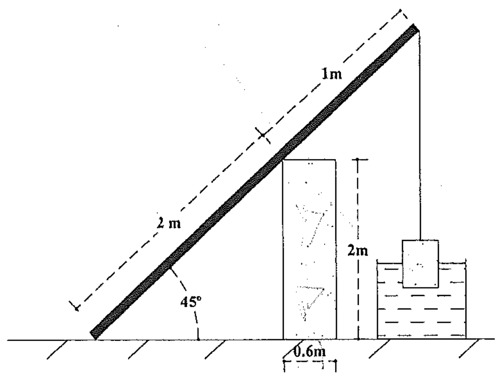
(Febrero-2000)



HID.10. - La varilla de la figura de peso $P_1 = 100N$, forma un ángulo de 45° con el suelo y se apoya sobre un cilindro de peso $P_2 = 300N$. En el extremo de la varilla cuelga, mediante un hilo, otro cilindro de peso $P_3 = 50N$, que se haya flotando sobre una cubeta de agua, de forma que sólo la mitad del cilindro está sumergida. Suponiendo que existe rozamiento de la varilla y el cilindro con el suelo y carece de rozamiento el contacto varilla-cilindro, se pide:

1.- Tensión del hilo.
2.- Reacción normal del suelo sobre la varilla.
3.- Posición de la reacción del suelo sobre el cilindro.

(Febrero-2006)



• PROBLEMAS HIDROSTÁTICA

• LIBRO 1

El esquema de la figura, muestra dos cuerpos de igual tamaño (altura H y área de sus bases S) que se encuentran unidos por un hilo inextensible y sin masa. Se sabe que cuando $h = 5/6\, H$, el sistema flota y permanece en equilibrio, siendo la densidad de A la mitad de la densidad ρ del líquido. Si la densidad de B es $k\rho$, se pide:

(1) Calcula los valores de k y la tensión del hilo

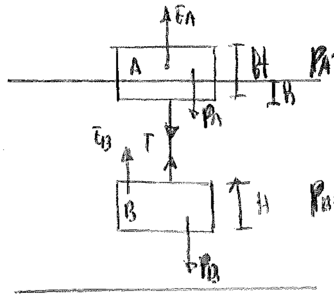
(2) Si se cambia la configuración del sistema, situando B donde está A y viceversa, ¿existiría equilibrio?

$h = 5/6\, H$

$d = m/V$

$m = d \cdot V$

$E_A = \rho_{líquido} \cdot g \cdot V_{sumergido}$



$\rho_A = 1/2\, \rho_{líquido}$

$P_A = m_A g = \rho_A \cdot V \cdot g = 1/2\, \rho_{líquido} \cdot S \cdot H \cdot g$

$E_A = \rho_{líquido} \cdot g \cdot 5/6\, H \cdot S$

$\rho_B = k\rho$

$P_B = m_B g = \rho_B \cdot V \cdot g = k\rho_{líquido} \cdot H \cdot S \cdot g$

$E_B = \rho_{líquido} \cdot H \cdot S \cdot g$

(1)

$\Sigma F_A = 0 \downarrow +$ $\quad T + 1/2\, \rho_{líquido} \cdot S \cdot Hg - 5/6\, HSg\, \rho_{líquido} = 0$ $\quad T = 1/3\, \rho_{líquido}\, SHg$

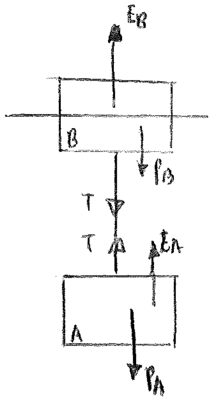
$\Sigma F_B = 0 \downarrow +$ $\quad k\rho_{líquido}\, HSg - 1/3\, \rho_{líquido}\, SHg - \rho_{líquido} \cdot H \cdot S \cdot g = 0$

$\rightarrow T = 1/3\, \rho_{líquido}\, SHg$

$\rho_{líquido}\, HSg\, (k - 1/3 - 1) = 0 \rightarrow k - 1/3 - 1 = 0$

$k = 4/3$

(2)



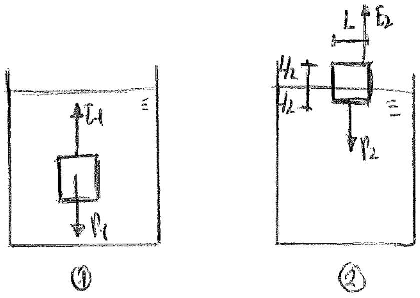
$\Sigma F_A = 0 \uparrow +$ $\quad T + \rho_{líquido} \cdot HSg - 1/2\, \rho_{líquido}\, SHg = 0$

$T = -1/2\, \rho_{líquido}\, HSg$

Como la tensión es negativa, no hay equilibrio entre los bloques A y B cuando intercambian sus posiciones.

HZD 02

En una cubeta que contiene un líquido con densidad ρ_L, se deposita un sólido de forma cúbica, lado L y densidad ρ_s tal que $\rho_L<\rho_s$, de la forma que indica la figura (1). Simultáneamente en otra cubeta idéntica, se sitúa un sólido igual pero con la mitad sumergida, tal como muestra la figura (2). Ambos sólidos partiendo del reposo comienzan simultáneamente a descender. Razona con qué aceleración comienzan a descender ambos. ¿Son iguales?



$\rho_{líquido}$

$\rho_{sólido}$

$\rho_L<\rho_s$

(1) $E_1 = \rho_{líquido}\cdot g\cdot L^3$

$P_1 = m_1\cdot g = \rho_{sólido}\cdot g\cdot L^3$

$\Sigma F = m\cdot a \downarrow + \quad \rho_s\cdot g\cdot L^3 - \rho_L\cdot g\cdot L^3 = \rho_s\cdot L^3\cdot a_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{\rho_s\cdot g - \rho_L\cdot g}{\rho_s} = g\cdot\dfrac{(\rho_s-\rho_L)}{\rho_s}$

(2) $E_2 = \rho_{líquido}\cdot g\cdot L^3\cdot 1/2$

$P_2 = m_2\cdot g = \rho_{sólido}\cdot g\cdot L^3$

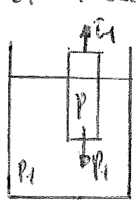
$\Sigma F = m\cdot a \downarrow + \quad \rho_s\cdot g\cdot L^3 - \rho_L\cdot g\cdot L^3\cdot 1/2 = \rho_s\cdot L^3\cdot a_2 \rightarrow a_2 = \dfrac{\rho_s\cdot g - \rho_L\cdot g\cdot 1/2}{\rho_s} = g\cdot\dfrac{(\rho_s - 1/2\,\rho_L)}{\rho_s}$

La a_2 es mayor que la a_1, $a_2>a_1$. No son iguales

HZD 03

Se tiene un cilindro homogéneo de radio "r", altura "h" y densidad ρ, flotando en un líquido de densidad ρ_1, según se muestra en la figura. Deducir la fórmula para la fracción $n=V_s/V$ del volumen del cilindro que queda sumergida respecto de su volumen total, expresando n en función de ρ y ρ_1 exclusivamente.
Si ahora se añade otro líquido 2, inmiscible con el líquido 1, de densidad $\rho_2<\rho_1$, hasta que el nivel del nuevo líquido se iguale con la altura del cilindro que emerge del líquido 1, deducir el nuevo porcentaje n de volumen del cilindro que queda sumergido en el líquido 1 en función de ρ, ρ_1 y ρ_2 exclusivamente. Desprecia la acción de la presión atmosférica.

(1)



Cilindro homogeneo radio=r altura=h densidad=ρ

densidad 1= ρ_L

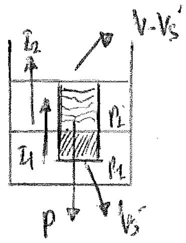
$E_1 = \rho_{líquido}\cdot g\cdot V_s$

$P_1 = \rho_{sólido}\cdot g\cdot V$

$V_s/V = \rho_s/\rho_L = n$

$n = V_s/V \qquad \Sigma F = 0 \downarrow + \quad P - E_1 = 0 \quad P = E_1 \quad \rho_{líquido}\cdot g\cdot V_s = \rho_{sólido}\cdot g\cdot V \rightarrow \rho_L\cdot V_s = \rho_s\cdot V$

(2)



Añade Líquido Inmiscible

$\rho_2<\rho_1$

$E_1 = \rho_{líquido_1}\cdot g\cdot V_s'$

$E_2 = \rho_{líquido_2}\cdot g\,(V-V_s')$

$P = \rho_{sólido}\cdot V\cdot g$

$\Sigma F = m\cdot a \downarrow + \quad \rho_{sólido}\cdot \cancel{g}\cdot V - \rho_{líquido_1}\cdot\cancel{g}\cdot V_s' - \rho_{líquido_2}\cdot\cancel{g}\,(V-V_s') = 0$

$\rho_s\cdot V - \rho_{L1}\cdot V_s' - \rho_{L2}\cdot V + \rho_{L2}\cdot V_s' = 0$

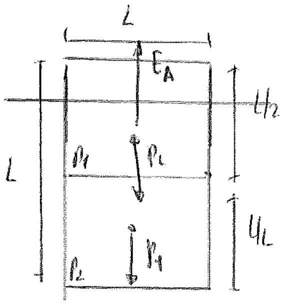
$\rho_s\cdot V - \rho_{L2}\cdot V = \rho_{L1}\cdot V_s' - \rho_{L2}\cdot V_s'$

$V(\rho_s-\rho_{L2}) = V_s'(\rho_{L1}-\rho_{L2})$

$\dfrac{V_s'}{V_s} = \dfrac{(\rho_s-\rho_{L2})}{(\rho_{L1}-\rho_{L2})}$

HID 04

Un cubo de lado L se compone en una de sus mitades de un material de densidad ρ_1 y en otra de otro material de densidad ρ_2. El cubo se deposita en un recipiente con agua de forma que el material de densidad ρ_1 esté situado en la parte inferior. Razona la longitud de la parte sumergida del cubo.



$\rho_{agua} = \rho_A$

$d = m/V \rightarrow m = d\cdot V$

$P_T = P_1 + P_2 = [m_1\cdot g] + [m_2\cdot g] = \rho_1\cdot L^2\cdot L/2\cdot g + \rho_2\cdot L^2\cdot L/2\cdot g = L^3/2\cdot g(\rho_1+\rho_2)$

$E_A = \rho_{agua}\cdot g\cdot V_{sumergido} = \rho_A\cdot g\cdot L^2\cdot h$

$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow P_1 + P_2 - E_A = 0 \quad L^{\cancel{3}}/2\cdot \cancel{g}(\rho_1+\rho_2) - \rho_A\cdot\cancel{g}\cdot\cancel{L^2}\cdot h = 0$

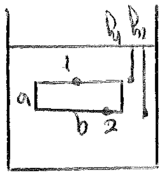
$$h = \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_A}\cdot L/2$$

HID 05

Un bloque ortoédrico de dimensiones a, b y c está en equilibrio en el seno de un líquido en un depósito de densidad ρ. Se coloca primero con el lado a vertical y después con el lado b vertical, siendo b mayor que a. Se pide:

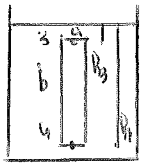
1. Discutir en qué caso la diferencia entre las presiones en las caras superior e inferior del bloque es mayor.
2. Razonar por qué siendo estas diferencias de presión distintas según el caso, puede existir equilibrio en ambos casos.
3. Si la presión en los puntos de la cara superior en el caso (1) es de 1 atm y en el caso (2) es de 1024 mb ¿en qué caso está la superficie superior del bloque más próxima a la superficie libre del líquido?

(1)



$p_1 = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_1$
$p_2 = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_2$

(2)



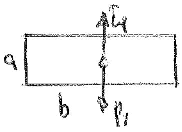
$p_3 = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_3$
$p_4 = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_4$

$V_{sumergido} = a\cdot b\cdot c$

$P = F/S \ (\frac{N}{m^2} = Pa)$

(1) $p_2 - p_1 = \rho\cdot g(h_2 - h_1)$ $\quad p_4 - p_3 = \rho\cdot g(h_4 - h_3)$ $\quad \underbrace{p_4 - p_3}_{b} > \underbrace{p_2 - p_1}_{a}$ ya que b>a

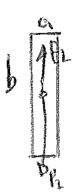
(2)



$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow E_1 = P_1$

$E_1 = \rho_{líquido}\cdot g\cdot V_{sumergido}$

$P_1 = m_1\cdot g = \rho_{sólido}\cdot g\cdot V = \rho_s\cdot g\cdot abc$



$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow E_2 = P_2$

$E_2 = \rho_{líquido}\cdot g\cdot V_{sumergido}$

$P_2 = m_2\cdot g = \rho_{sólido}\cdot g\cdot V = \rho_s\cdot g\cdot abc$

Como es el mismo sólido y está sumergido en ambos casos completamente, está sometido a las mismas fuerzas, está en equilibrio

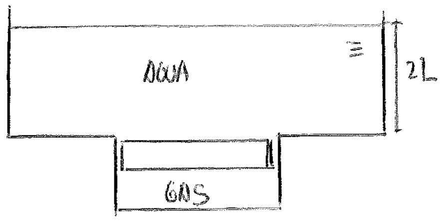
(3) $p_1 = 1\,atm$ $\quad p_3 = 1024\,mb = 1{,}024\,atm$ $\quad 1\,atm \approx 1\,bar$

$p_1 = P_{atm} + \rho g h_1$ $\quad p_3 = P_{atm} + \rho g h_3$ $\quad p_3 > p_1 \rightarrow h_3 > h_1$

La superficie superior más próxima a la superficie libre de líquido es la del bloque con el lado a en posición vertical. (caso 1)

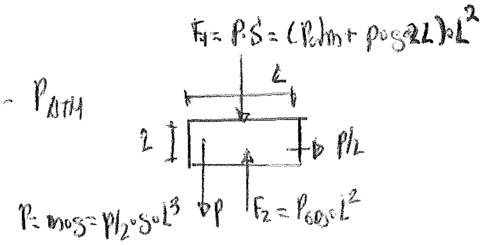
· HID.06

Un depósito de líquido de densidad ρ está lleno hasta una profundidad de $2L$. En el fondo del depósito existe un tapón en forma de cubo de lado L y densidad $\rho/2$. En la parte inferior del tapón existe un gas. Determinar la relación entre la presión manométrica del gas y el valor de L para que el tapón permanezca en equilibrio.



Presión manométrica: $P_{GAS} - P_{ATM}$

Fuerza = Presión · Superficie



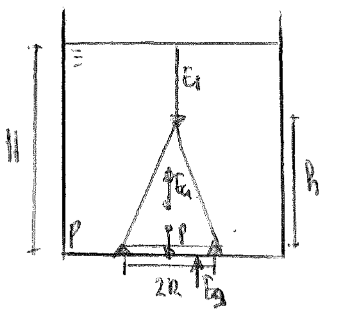
$\sum \vec{F} = 0$ $\downarrow +$ $P + F_1 - F_2 = 0 \rightarrow \rho/2 \cdot g \cdot L^{\cancel{3}} + (P_{atm} + \rho \cdot g \cdot 2L) \cdot \cancel{L^2} - P_{GAS} \cdot \cancel{L^2} = 0 \rightarrow P_{atm} + \rho \cdot g \cdot 2L + \rho/2 \cdot L g = P_{GAS} \rightarrow$

$P_{GAS} = P_{atm} + 5/2\, \rho \cdot g \cdot L$ Presión Manométrica $= P_{atm} + 5/2 \cdot \rho \cdot g \cdot L - P_{atm} \rightarrow$

$\dfrac{\text{Presión Manométrica}}{L} = 5/2 \cdot \rho \cdot g$

· HID 07

Un cono de altura h y radio R, posee una densidad mayor que la del agua. Dicho cono se deposita con sus bases situada sobre unos pequeños apoyos, de tamaño despreciable, en el fondo de una cubeta llena de agua, de forma que en la superficie del agua tiene una altura $H > h$ respecto del fondo. Determinar la resultante de las fuerzas de presión que ejerce el agua sobre la superficie lateral del cono



$E_a = E_2 - E_1$

$E_1 = E_a - E_2$

$E_a = \rho \cdot g \cdot \underbrace{1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}_{\text{volumen cono}}$

→ Diferencia con el fondo despreciable

$E_2 = P_2 \cdot S = (P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H)\underbrace{(\pi \cdot R^2)}_{\text{Superficie cono}}$

$E_1 = E_a - E_2 = (P_{atm} + \rho g H)(\pi R^2) - \rho \cdot g \cdot 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

$E_a = \rho g \cdot V_{SUMERGIDO}$ $E_1 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_1$ $E_2 = P_{atm} + \rho g h_2$ Superficie Cono $= (\pi \cdot r^2)$ Volumen cono $= (1/3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h)$

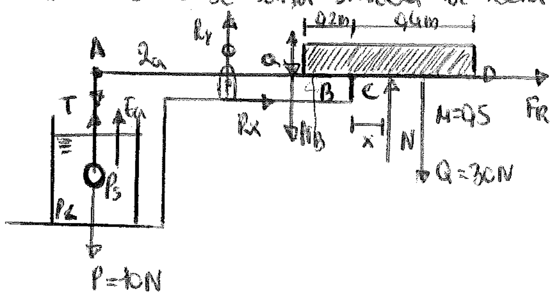
$E_1 = (P_{atm} + \rho g H)(\pi \cdot R^2) - \rho g\, 1/3\, \pi R^2 h$

• HIDRO 08

La varilla AB de la figura, de peso despreciable y articulada en O, tal que OA = 2OB, está en equilibrio en su posición horizontal debido al peso P=10 N de la bola sumergida en el líquido de densidad la mitad que la densidad de la bola y, por el otro extremo B, al contacto con el bloque de peso Q=30N, que se mantiene apoyado sobre un suelo rugoso horizontal de coeficiente de rozamiento μ=0,5. La longitud del bloque es 3L=0,6m, estando apoyado sobre el suelo la distancia CD=0,4 m. Se pide:

(1) Calcular la tensión del hilo vertical que une la bola al extremo A de la varilla

(2) Valor de la reacción normal y de la fuerza de rozamiento que el suelo ejerce sobre el bloque de peso Q, calculando donde se halla situada la recta soporte de la reacción normal.



$OA = 2OB$ $\quad E_A = \rho_{LIQUIDO} \cdot g \cdot V_{SUMERGIDO} = \rho_L \cdot V_B \cdot g$

$P = 10\ N$ $\quad P = m \cdot g = \rho_{SOLIDO} \cdot g \cdot V_{BOLA} = 2\rho_L \cdot V_B \cdot g$

$\rho_S = 2\rho_L$

$Q = 30\ N$

(1) BOLA

$\sum \vec{F} = 0 \ \downarrow + \quad P - T - E_a = 0 \rightarrow 10 - T - \rho_L \cdot V_B \cdot g = 0 \rightarrow 10 - T - 5 = 0 \rightarrow T = 5N$

$P = 2\rho_L \cdot V_B \cdot g \rightarrow 10 = 2\rho_L \cdot V_B \cdot g \rightarrow 5 = \rho_L \cdot V_B \cdot g$

(2) VARILLA

$\sum \vec{F_x} = 0 \rightarrow + \quad R_x = 0 \quad \sum \vec{F_y} = 0 \ \downarrow + \quad T + N_B - R_y = 0 \rightarrow R_y = T + N_B = 5 + 10 = 15N \quad \sum \vec{M_O} = 0 \quad T \cdot 2a - N_B \cdot a = 0 \quad N_B = 2a/a \cdot T = 10N$

SÓLIDO

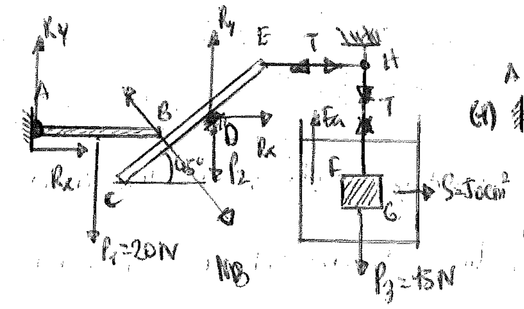
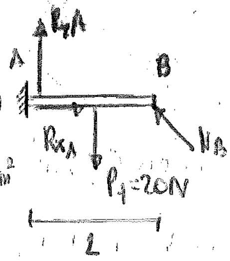
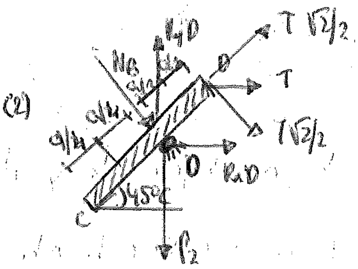
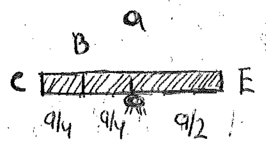
$\sum \vec{F_x} = 0 \rightarrow + \quad F_R = 0 \quad \sum \vec{F_y} = 0 \ \uparrow + \quad N_B + N - Q = 0 \rightarrow N = Q - N_B = 20N \quad \sum \vec{M_C} = 0 \quad N \cdot x - N_B \cdot 0{,}2 - Q \cdot 0{,}1 = 0 \rightarrow x = 0{,}25\ m$

HIDRO 09

Una varilla AB de peso $P_1 = 20$ N, está articulada a la pared en su extremo A y se apoya sin rozamiento en B sobre una segunda varilla homogénea CE, siendo B el punto medio de CD. Esta varilla permanece en equilibrio formando 45° con la horizontal, estando articulada en su punto medio D. A su extremo E está unido un hilo del que tras un apoyo liso en H, cuelga un peso $P_3 = 15N$ que permanece en equilibrio en un líquido de densidad desconocida. Se pide calcular:

(1) Reacción en la articulación A y tensión del hilo

(2) Diferencia de presiones entre los puntos G y F siendo la sección del bloque $S = 50\ cm^2$

(1) AB

$\sum \vec{F_x}=0 \rightarrow + \; R_{xA}-N_B\sqrt{2}/2=0 \quad \sum \vec{F_y}=0 \uparrow + \; R_{yA}+N_B\sqrt{2}/2-P_1=0 \quad \sum M_A=0 \quad N_B\sqrt{2}/2 \cdot L - P_1 \cdot L/2=0 \rightarrow N_B=20/\sqrt{2}=10\sqrt{2}\,N$

$R_{xA}=R_{yA}=10N$

CE

$\sum M_D=0 \quad N_B \cdot a/4 - T\sqrt{2}/2 \cdot a/2=0 \rightarrow T=\dfrac{10\sqrt{2}\cdot a\cdot 4}{4\cdot\sqrt{2}\cdot a}=10N$

(2) BLOQUE

$\sum \vec{F} \downarrow + \quad P_3-T-E_a=0 \qquad 15-10-E_a \rightarrow E_a=5N \qquad$ Fuerza = Presión · Superficie $\rightarrow P=F/S=N/m^2=Pa$

$E_a=$ $\rho_{\text{líquido}} \cdot g \cdot V_{\text{sumergido}}=\rho_L \cdot g \cdot h \cdot S \rightarrow \rho\cdot g\cdot h=5/50\times10^{-4}=10^3\,Pa \qquad P=P_{atm}+\rho g h \qquad P_1=P_{atm}+\rho g h_1$, $P_2=P_{atm}+\rho g h_2$

$P_G-P_F=\rho g(h_G-h_F) \rightarrow P_G-P_F=\rho g H=10^3\,Pa$

$\rightarrow 10^3\,Pa \quad H=h_G-h_F=h$

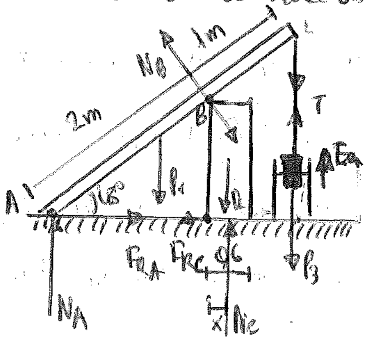
• MOD 10

La varilla de la figura de peso $P_1=100\,N$, forma un ángulo de 45º con el suelo y se apoya sobre un cilindro de peso $P_2=300\,N$. En el extremo de la varilla cuelga, mediante un hilo, otro cilindro de peso $P_3=50N$, que se haya flotando sobre una cubeta de agua, de forma que sólo la mitad del cilindro está sumergida. Suponiendo que existe rozamiento de la varilla y el cilindro con el suelo y carece de rozamiento el contacto varilla-cilindro, se pide:

(1) Tensión del hilo

(2) Reacción Normal del suelo sobre la varilla

(3) Posición de la reacción del suelo sobre el cilindro.



$P_1=100N$

$P_2=300N$

$P_3=50N$

VARILLA

(1) $\sum \vec{F_x}=0 \rightarrow + \quad F_{RA}-N_B\sqrt{2}/2=0$

$\sum \vec{F_y}=0 \uparrow + \quad N_A+N_B\sqrt{2}/2-P_1-T=0 \rightarrow N_A=70\,N$

$\sum M_A=0 \quad -P_1\cdot\sqrt{2}/2\cdot 3/2+N_B\cdot\sqrt{2}/2\cdot 2-T\cdot\sqrt{2}/2\cdot 3=0 \quad N_B=84{,}85\,N$

Necesitamos la ayuda del bloque para obtener la tensión

(2) BLOQUE $\qquad \rightarrow H\cdot R^2\cdot h=4\times10^{-3}\,m^3$

$\sum \vec{F}=0 \downarrow + \quad P_3-T-E_a=0 \rightarrow 50-T-\rho_{agua}\cdot g\cdot V/2 \rightarrow T=50-\left(1000\,kg/m^3\cdot\frac{4\times10^{-3}}{2}m^3\cdot 10\,N/kg\right)=30N$

$E_a=\rho_{\text{líquido}}\cdot g\cdot V_{\text{sumergido}} \quad \rho_{agua}=1000\,kg/m^3$

(3) CILINDRO

$\sum \vec{F_x}=0 \rightarrow + \; F_{Rc}-N_B\sqrt{2}/2=0 \quad \sum \vec{F_y}=0 \uparrow + \; N_c-P_2-N_B\sqrt{2}/2=0 \quad \sum M_O=0 \quad N_c\cdot x-P_2\cdot 0{,}3-N_B\cdot\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{2}=0 \rightarrow x=0{,}14\,m$